Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 5: Lösungen

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Zentralübungsaufgaben

Aufgabe Z5.1

(a) Sei $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge und seien $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ unabhängige und $\cap$-stabile Mengensysteme. Ferner sei $K \neq \emptyset$ eine weitere Indexmenge und $I = \cup_{k\in K} I_k$ eine Zerlegung von I in paarweise disjunkte Mengen. Zeigen Sie, dass die Systeme $\{\sigma\left(\bigcup_{i\in I_k} \mathcal{A}_i\right)\}_{k\in K}$ unabhängig sind.

(b) Finden sie drei σ-Algebren $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$, die paarweise unabhängig sind, sodass $\sigma(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$ nicht unabhängig von $\mathcal{A}_3$ ist.

(c) Seien $\{X_{i,j}\}_{1\le i\le n, 1\le j\le k_i}$ unabhängige Zufallsvariablen und $f_i : \mathbb{R}^{k_i} \to \mathbb{R}$ messbare Abbildungen. Zeigen Sie, dass auch $\{f_i(X_{i,1}, \dots, X_{i,k_i})\}_{1\le i\le n}$ unabhängig sind.

Lösung.

(a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ der W-Raum, auf dem die Ereignissysteme $(\mathcal{A}_i)$ definiert sind. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, dass $\Omega \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$ (andernfalls kann Ω hinzugefüt werden, ohne die Unabhängigkeit zu stören). Wir definieren die Mengensysteme

$$\mathcal{N}_k := \left\{ \bigcap_{i\in I_k} A_i : A_i \in \mathcal{A}_i \text{ für } i \in I_k, A_i \neq \Omega \text{ für höchstens endlich viele } i \in I_k \right\}$$

für $k \in K$. Die Voraussetzungen für Satz 3.5 sind erfüllt: Da die $\mathcal{A}_i$ allesamt $\cap$-stabil sind und Ω enthalten, sind auch die $\mathcal{N}_k$ $\cap$-stabil und enthalten Ω.

Wir behaupten außerdem, dass die $\mathcal{N}_k$ eine unabhängige Familie bilden: Sei hierfür $E \subseteq K$ endlich und $(A_i \in \mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine Ereignisfamilie mit der Eigenschaft $A_i \neq \Omega$ für höchstens endlich viele $i \in I$ gegeben. Aus der Unabhängigkeit der $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ und der paarweisen Disjunktheit der $I_k, k \in E$, folgt

$$P\left(\bigcap_{k\in E}\bigcap_{i\in I_k} A_i\right) = \prod_{k\in E}\prod_{i\in I_k} P(A_i) = \prod_{k\in E} P\left(\bigcap_{i\in I_k} A_i\right).$$

Nach Wahl der (A_i) sind höchstens endlich viele Faktoren von 1 verschieden. Es folgt die Unabhängigkeit der Familie $(\mathcal{N}_k)_{k\in K}$. Wenden wir nun Satz 3.5 an, so folgt, dass auch $(\sigma(\mathcal{N}_k))_{k\in K}$ unabhängig ist.

Man sieht leicht, dass $\sigma(\mathcal{N}_k) = \sigma(\cup_{i\in I_k}\mathcal{A}_i)$ für $k \in K$, womit die Behauptung folgt.

(b) Wir wählen den dreifachen, fairen Münzwurf, also $\Omega = \{0,1\}^3$ mit P der Gleichverteilung. Definiere $A_1 = \{\omega_1 = \omega_2\}, A_2 = \{\omega_2 = \omega_3\}, A_3 = \{\omega_1 = \omega_3\}$ und weiter $\mathcal{A}_i = \sigma(A_i) = \{\emptyset, \Omega, A_i, A_i^c\}$. Die A_i sind unabhängig wegen $P(A_i)P(A_j) = \frac{1}{4} = P(\omega_1 = \omega_2 = \omega_3) = P(A_i \cap A_j)$ für $i \neq j$; damit sind auch die $\mathcal{A}_i$ unahängig.

Es ist jedoch $B = \{\omega_1 = \omega_2 = \omega_3\} \in \sigma(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$, aber $P(B \cap A_3) = P(B) \neq P(B)P(A_3)$.

(c) Nach Angabe ist $(\sigma(X_{i,j}))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq k_i}$ unabhängig. Da σ-Algebren $\cap$-stabil sind, lässt sich (a) anwenden und $(\sigma(\cup_{j=1}^{k_i} X_{i,j}))_{i\in[n]}$ ist unabhängig. Sei nun $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dann ist

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (f_i(X_{i,1}, \ldots, X_{i,k_i}) \in A_i)\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \Big((X_{i,1}, \ldots, X_{i,k_i}) \in f_i^{-1}(A_i)\Big)\right)$$

und $\{(X_{i,1}, \ldots, X_{i,k_i}) \in f_i^{-1}(A_i)\} \in \sigma(\cup_{j=1}^{k_i} X_{i,j})$. Die Ereignisse sind also unabhängig nach (a).

Aufgabe Z5.2

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit $X_1 \sim \mathcal{U}_{(a,b)}$ gleichverteilt auf (a,b). Berechnen Sie die (Lebesgue-)Dichte der Zufallsvariable $Y = \max_{1\leq i\leq n} X_i$. Berechnen Sie außerdem $\mathbb{E}[Y]$.

Lösung. Mit der Unabhängigkeit folgt für $x \in (a,b)$

$$P(Y \leq x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x) = P(X_1 \leq x)^n = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n.$$

Für die Dichte folgt also

$$f_Y(x) = \mathbb{1}_{(a,b)}(x) \cdot \frac{n}{b-a}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-1}.$$

Es ist $Y - a \geq 0$, und so folgt mit Ü4.8, dass

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] - a = \mathbb{E}[Y-a] &= \int_0^{b-a} P(Y \geq x+a)\,\mathrm{d}x = \int_0^{b-a} \left[1 - \left(\frac{x}{b-a}\right)^n\right] \mathrm{d}x \\ &= (b-a) - \frac{1}{n+1}(b-a) = \frac{n}{n+1}(b-a).\end{aligned}$$

Also $\mathbb{E}[Y] = \frac{nb+a}{n+1}$.

Aufgabe Z5.3

Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Sei N eine weitere, davon unabhängige Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$ und endlichem Erwartungswert. Drücken Sie die Erwartung der Zufallsvariable

$$Y := \sum_{k=1}^{N} X_k$$

durch die Erwartung von X_1 und N aus.

Lösung. Definiere $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Wir betrachten zuerst den Fall, dass N durch eine natürliche Zah $M \in \mathbb{N}$ beschränkt ist. Dann gilt

$$S_T = \sum_{n=1}^M S_n \cdot \mathbb{1}_{\{N=n\}} = \sum_{n=1}^M \sum_{i=1}^n X_i \cdot \mathbb{1}_{\{N=n\}} = \sum_{i=1}^M \sum_{n \geq i} X_i \cdot \mathbb{1}_{\{N=n\}} = \sum_{i=1}^M X_i \cdot \mathbb{1}_{\{N \geq i\}}.$$

Für den Erwartungswert gilt daher mit der Unabhängigkeit sowie Ü4.8, dass

$$E[S_T] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \sum_{i=1}^M P(N \geq i) = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[N].$$

Im allgemeinen Fall bedarf es eines Arguments, um Vertauschung von Reihe und Erwartungswert zu rechtfertigen. Wir wollen dominierte Konvergenz verwenden und betrachten daher die Summe der $|X_i|$, für welche die obige Rechnung mit dem Satz der monotonen Konvergenz gilt:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n \geq 1} \sum_{i=1}^n |X_i| \cdot \mathbb{1}_{\{N=n\}}\right] = \sum_{n \geq 1} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i|] \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{N=n\}}] = \mathbb{E}[|X_1|] \cdot \mathbb{E}[N].$$

Dieselbe Rechnung gilt daher nach dem Satz der dominierten Konvergenz auch für $\sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[S_n \mathbb{1}_{\{N=n\}}]$, da S_n durch $\sum_{i=1}^n |X_i|$ dominiert wird. Dies zeigt das Resultat.

Aufgabe Z5.4

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen und $X_1 \sim \mathrm{Ber}(p)$, d.h. X_1 ist Bernoulli-verteilt zum Parameter p. Berechnen Sie die Verteilung von $\sum_{i=1}^n X_i$. Um welche Verteilung handelt es sich?

Lösung. Sei $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ und $0 \leq k \leq n$. Dann ist $\{S_n = k\}$ als

$$\{S_n = k\} = \bigcup_{\substack{J \subseteq [n] \\ |J| = k}} \{X_i = 1 \ \forall i \in J, X_j = 0 \ \forall j \in [n] \setminus J\}$$

partitionierbar. Folglich gilt

$$P(S_n = k) = \sum_{\substack{J \subseteq [n] \\ |J| = k}} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

also ist S_n binomialverteilt zu Parametern n, p.

Übungsaufgaben

Aufgabe Ü5.5

Seien X, Y Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, sodass

$$P((X,Y) \in C) = \int_C f_{X,Y}(x,y) \, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x,y)$$

für $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, $f_{X,Y} \geq 0$ und das Produktmaß $\mu \otimes \nu$ der beiden Maße μ und ν. Zeigen Sie:

(a) Die Funktionen

$$f_X : x \mapsto \int f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y), \quad f_Y : y \mapsto \int f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

sind Dichten bzgl. μ und ν der Marginalverteilungen $P(X \in \cdot)$ und $P(Y \in \cdot)$.

(b) X, Y unabhängig $\iff f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ $\mu \otimes \nu$-f.ü.

Lösung.

(a) Sei $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Es gilt

$$\begin{aligned} P(X \in A) &= \int \mathbb{1}_A(x) f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x,y) \overset{\text{Fubini}}{=} \int \mathbb{1}_A(x) \int f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\nu(x) \\ &= \int \mathbb{1}_A(x) f_X(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_A f_X(x)\,\mathrm{d}\mu(x). \end{aligned}$$

Analog zeigt man $P(Y \in B) = \int_B f_Y(y)\,\mathrm{d}\nu(y)$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} P(X \in A) P(Y \in B) &= \int \mathbb{1}_A(x) f_X(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \int \mathbb{1}_B(y) f_Y(y)\,\mathrm{d}\nu(y) \\ &= \int \mathbb{1}_A(x) f_X(x) \int \mathbb{1}_B(y) f_Y(y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int \mathbb{1}_{A\times B}(x,y) f_X(x) f_Y(y)\,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x,y); \\ P(X \in A, Y \in B) &= \int \mathbb{1}_{A\times B}(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x,y). \end{aligned}$$

Gilt nun $f_X(x) f_Y(y) = f_{X,Y}(x,y)$ $\mu \otimes \nu$-f.ü., so sind die rechten Seiten der obigen Gleichungen identisch und es folgt die Unabhängigkeit.

Sind hingegen X und Y unabhängig, so sind die linken Seiten der Gleichungen identisch. Die identischen Maße $P(X \in \cdot, Y \in \cdot)$ und $P(X \in \cdot)P(Y \in \cdot)$ haben also beide eine Radon-Nikodym-Dichte bzgl. $\mu \otimes \nu$, und nach dem Satz von R-N ist diese $\mu \otimes \nu$-f.ü. eindeutig.

Aufgabe Ü5.6

Seien X, Y integrierbare Zufallsvariablen. Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ gilt, dann sind X und Y unabhängig.

Lösung. Wir konstruieren ein Gegenbeispiel: Sei $\Omega = \{1,2,3\}$, P die Gleichverteilung. Sei weiterhin $X(i) = -i + 2$ (d.h. X bildet $(1,2,3)$ auf $(1,0,-1)$ ab) und bilde Y die Werte $(1,2,3)$ auf $(0,1,0)$ ab.
Dann ist $XY = 0 = \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$, aber $P((X,Y) = (1,1)) = 0 \neq \frac{1}{9} = P(X = 1)P(Y = 1)$, es sind also X und Y abhängig.

Aufgabe Ü5.7

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] = 0$ und $\mathbb{E}[X_1^{2k}] < \infty$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[S_n^{2k}] \leq C_k \mathbb{E}[X_1^{2k}] n^k,$$

wobei C_k eine nur von k abhängige Konstante ist. *Hinweis: Hölder-Ungleichung.*

Lösung. Wir können S_n^{2k} umschreiben als die Summe von Termen der Form $C_{i_1,\dots,i_m} \cdot X_{j_1}^{i_1} \cdots X_{j_m}^{i_m}$, wobei die i_l positiv sind mit $\sum_{l=1}^m i_l = 2k$ sowie $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_m \leq n$ (folgt z.B. direkt aus dem Multinomialsatz). Für fixierte Indizes $j_1, \dots, j_m$ können wir in jedem der $2k$ Faktoren S_n höchstens aus m verschiedenen Werten für den Index von X_j wählen, es ist also $C_{i_1,\dots,i_m} \leq m^{2k}$.
Falls $i_l = 1$ für ein l, dann ist die Erwartung des zugehörigen Summanden 0. Dies folgt aus der Unabhängigkeit und $\mathbb{E}[X_1] = 0$. Also lässt sich $\mathbb{E}[S_n^{2k}]$ als Summe von Termen der Form $C_{i_1,\dots,i_m}\mathbb{E}[X_{j_1}^{i_1}] \cdots \mathbb{E}[X_{j_m}^{i_m}]$ darstellen, wobei $i_1, \dots, i_m \geq 2$, $\sum_{l=1}^m i_l = 2k$ und die j_l wie zuvor. Man bemerke, dass hieraus $m \leq k$ folgt. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_n^{2k}] &= \sum_{m=1}^k \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_m=2k \\ i_l \geq 2 \ \forall l \in [m]}} C_{i_1,\dots,i_m} \left(\sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n} \mathbb{E}[X_{j_1}^{i_1}] \cdots \mathbb{E}[X_{j_m}^{i_m}] \right) \\ &= \sum_{m=1}^k \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_m=2k \\ i_l \geq 2 \ \forall l \in [m]}} C_{i_1,\dots,i_m} \binom{n}{m} \mathbb{E}[X_1^{i_1}] \cdots \mathbb{E}[X_1^{i_m}].\end{aligned}$$

Mit der Hölder-Ungleichung gilt $\mathbb{E}[X_1^{i_l}] \leq \mathbb{E}[X^{2k}]^{i_l/2k}$. Doch daraus folgt direkt

$$\mathbb{E}[X_1^{i_1}] \cdots \mathbb{E}[X_1^{i_m}] \leq \mathbb{E}[X_1^{2k}]$$

und mit der anfänglichen Abschätzung für $C_{i_1,\dots,i_m}$ sowie der zusätzlichen Abschätzung $\binom{n}{m} \leq n^m \leq n^k$, dass

$$E[S_n^{2k}] \leq \sum_{m=1}^k \sum_{i_1+\ldots+i_m=2k} m^{2k} n^k \mathbb{E}[X_1^{2k}] = C_k n^k \mathbb{E}[X_1^{2k}].$$

Aufgabe Ü5.8

Seien $\mu, \lambda > 0$ und X, Y Zufallsvariablen, sodass (X, Y) die Lebesgue-Dichte $\lambda\mu e^{-\lambda x - \mu y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}$ besitzt. Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Paare von Zufallsvariablen unabhängig sind:

(a) X und Y;
(b) $X + Y$ und X/Y;
(c) $X + Y$ und $X/(X + Y)$.

Lösung. Nicht anderweitig spezifizierte Integrale laufen in dieser Aufgabe über die Menge $[0, \infty]$.

(a) Mit

$$\begin{aligned}P(X \in A) &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \mathbb{1}_A(x)\lambda\mu e^{-\lambda x - \mu y} \, \mathrm{d}^2(x, y) = \int \mathbb{1}_A(x)\lambda e^{-\lambda x} \int \mu e^{-\mu y} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\ &= \int_A \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} \lambda e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ sehen wir, dass X $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilt ist; analog ist Y $\mathrm{Exp}(\mu)$-verteilt. Das Produkt der Dichten ist daher die gemeinsame Dichte und X und Y sind nach Aufgabe Ü5.5 unabhängig.

(b) Die Aussage stimmt nur für $\lambda = \mu$. Wir betrachten zuerst die Verteilung von X/Y. Für $a > 0$ gilt

$$\begin{aligned} P(X/Y \le a) = P(X \le aY) &= \int \mu e^{-\mu y} \int_0^{ay} \lambda e^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &= \int \mu e^{-\mu y}(1 - e^{-\lambda a y})\, \mathrm{d}y \\ &= 1 - \int \mu e^{-(\mu + a\lambda)y}\, \mathrm{d}y = 1 - \frac{\mu}{\mu + \lambda a} = \frac{\lambda a}{\mu + \lambda a}. \end{aligned}$$

Im Fall $\lambda = \mu$ erhält man $P(X/Y \le a) = a/(1+a)$.Für die Verteilung von $X + Y$ gilt des Weiteren mit $b > 0$

$$\begin{aligned} P(X + Y \le b) = P(X \le b - Y) &= \int_0^b \mu e^{-\mu y} \int_0^{b-y} \lambda e^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &= \int_0^b \mu e^{-\mu y}(1 - e^{(y-b)\lambda})\, \mathrm{d}y \\ &= 1 - e^{-\mu b} - \int_0^b \mu e^{-\lambda b} e^{(\lambda - \mu)y}\, \mathrm{d}y \\ &= 1 - e^{-\mu b} - \frac{\mu}{\lambda - \mu}\left(e^{-\mu b} - e^{-\lambda b}\right) \\ &= 1 + \frac{\mu}{\lambda - \mu} e^{-\lambda b} + \frac{\lambda}{\mu - \lambda} e^{-\mu b}. \end{aligned}$$

Im Fall $\lambda = \mu$ erhält man $P(X + Y \le b) = 1 - (1 + \mu b)e^{-\mu b}$. Es verbleibt, die gemeinsame Verteilung zu berechnen und zu zeigen, dass sie das Produkt der beiden obigen ist. Hierfür setzen wir $m = \min(ay, b - y)$ für $a, b > 0$. Wir beobachten weiterhin, dass für $y \in [0, b]$ die Äquivalenz $ay \le b - y \iff y \le \frac{b}{1+a}$ gilt. Hiermit haben wir für $\lambda \ne \mu$

$$\begin{aligned} P(X/Y \le a, X + Y \le b) = P(X \le \min\{aY, b - Y\} &= \int_0^b \mu e^{-\mu y} \int_0^m \lambda e^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &= 1 - e^{-\mu b} - \int_0^{\frac{b}{1+a}} \mu e^{-(\mu + a\lambda)y}\, \mathrm{d}y - \int_{\frac{b}{1+a}}^b \mu e^{-\lambda b} e^{(\lambda - \mu)y}\, \mathrm{d}y \\ &= 1 - e^{-\mu b} - \frac{\mu}{\mu + a\lambda}\left(1 - e^{-\frac{b}{1+a}(\mu + a\lambda)}\right) + \frac{\mu}{\lambda - \mu}\left(e^{-\frac{b}{1+a}(\mu + a\lambda)} - e^{-\mu b}\right) \end{aligned}$$

Einsetzen mit Beispielwerten wie $\mu = a = b = 1, \lambda = 2$ zeigt die Abhängigkeit. Für $\lambda = \mu$ jedoch ist

$$\begin{aligned} P(X/Y \le a, X + Y \le b) = P(X \le \min\{aY, b - Y\} &= \int_0^b \mu e^{-\mu y} \int_0^m \mu e^{-\mu x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &= 1 - e^{-\mu b} - \int_0^{\frac{b}{1+a}} \mu e^{-(\mu + a\mu)y}\, \mathrm{d}y - \int_{\frac{b}{1+a}}^b \mu e^{-\mu b} e^{(\mu - \mu)y}\, \mathrm{d}y \\ &= 1 - e^{-\mu b} - \frac{1}{1+a}\left(1 - e^{-\mu b}\right) - \mu b\left(1 - \frac{1}{1+a}\right) e^{-\mu b} \\ &= \frac{a}{1+a}\left(1 - e^{-\mu b} - \mu b e^{-\mu b}\right) = \frac{a}{1+a}\left(1 - (1 + \mu b)e^{-\mu b}\right). \end{aligned}$$

(c) Die Aussage stimmt für $\lambda = \mu$. Seien $a, b > 0$. Definiere $f(z) = \mathbb{1}_{\{z \leq a\}}, g(z) = \mathbb{1}_{\{(1+z^{-1})^{-1} \leq b\}}$. Da $X + Y$ und X/Y unabhängig sind, gilt mit Satz 3.9

$$\begin{aligned} P(X + Y \leq a, X/(X+Y) \leq b) &= \mathbb{E}[f(X+Y)g(X/Y)] = \mathbb{E}[f(X+Y)]\mathbb{E}[g(X/Y)] \\ &= P(X+Y \leq a)P(X/(X+Y) \leq b). \end{aligned}$$