Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 5

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Zentralübungsaufgaben

Aufgabe Z5.1

(a) Sei $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge und seien $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ unabhängige und $\cap$-stabile Mengensysteme. Ferner sei $K \neq \emptyset$ eine weitere Indexmenge und $I = \cup_{k\in K} I_k$ eine Zerlegung von I in paarweise disjunkte Mengen. Zeigen Sie, dass die Systeme $\{\sigma\left(\bigcup_{i\in I_k} \mathcal{A}_i\right)\}_{k\in K}$ unabhängig sind.

(b) Finden sie drei σ-Algebren $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$, die paarweise unabhängig sind, sodass $\sigma(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$ nicht unabhängig von $\mathcal{A}_3$ ist.

(c) Seien $\{X_{i,j}\}_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq k_i}$ unabhängige Zufallsvariablen und $f_i : \mathbb{R}^{k_i} \to \mathbb{R}$ messbare Abbildungen. Zeigen Sie, dass auch $\{f_i(X_{i,1}, \ldots, X_{i,k_i})\}_{1\leq i\leq n}$ unabhängig sind.

Aufgabe Z5.2

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit $X_1 \sim \mathcal{U}_{(a,b)}$ gleichverteilt auf (a, b). Berechnen Sie die (Lebesgue-)Dichte der Zufallsvariable $Y = \max_{1\leq i\leq n} X_i$. Berechnen Sie außerdem $\mathbb{E}[Y]$.

Aufgabe Z5.3

Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sei N eine weitere, davon unabhängige Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$ und endlichem Erwartungswert. Drücken Sie die Erwartung der Zufallsvariable

$$Y := \sum_{k=1}^{N} X_k$$

durch die Erwartung von X_1 und N aus.

Aufgabe Z5.4

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen und $X_1 \sim \mathrm{Ber}(p)$, d.h. X_1 ist Bernoulli-verteilt zum Parameter p. Berechnen Sie die Verteilung von $\sum_{i=1}^{n} X_i$. Um welche Verteilung handelt es sich?

Übungsaufgaben

Aufgabe Ü5.5

Seien X, Y Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, sodass

$$P((X,Y) \in C) = \int_C f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x,y)$$

für $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, $f_{X,Y} \geq 0$ und das Produktmaß $\mu \otimes \nu$ der beiden Maße μ und ν. Zeigen Sie:

(a) Die Funktionen

$$f_X : x \mapsto \int f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y), \quad f_Y : y \mapsto \int f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

sind Dichten bzgl. μ und ν der Marginalverteilungen $P(X \in \cdot)$ und $P(Y \in \cdot)$.

(b) X, Y unabhängig $\iff f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ $\mu \otimes \nu$-f.s.

Aufgabe Ü5.6

Seien X, Y integrierbare Zufallsvariablen. Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ gilt, dann sind X und Y unabhängig.

Aufgabe Ü5.7

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] = 0$ und $\mathbb{E}[X_1^{2k}] < \infty$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Sei $S_n = \sum_{0=1}^{n} X_i$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[S_n^{2k}] \leq C_k \mathbb{E}[X_1^{2k}] n^k,$$

wobei C_k eine nur von k abhängige Konstante ist. *Hinweis: Hölder-Ungleichung.*

Aufgabe Ü5.8

Seien $\lambda, \mu > 0$ und X, Y Zufallsvariablen, sodass (X, Y) die Lebesgue-Dichte $\lambda\mu e^{-\lambda x - \mu y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}$ besitzt. Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Paare von Zufallsvariablen unabhängig sind:

(a) X und Y;
(b) $X + Y$ und X/Y;
(b) $X + Y$ und $X/(X + Y)$.