Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 4: Lösungen

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Zentralübungsaufgaben

Aufgabe Z4.1

In dieser Aufgabe werden wir die Cantor-Funktion aus der Vorlesung untersuchen. Sei $f_0 : [0,1] \to [0,1]$ gegeben durch $f_0(x) = x$ und für $n \in \mathbb{N}_0$

$$f_{n+1} : [0,1] \to [0,1], \qquad f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(3x)/2, & 0 \le x \le 1/3 \\ 1/2, & 1/3 \le x \le 2/3 \\ 1/2 + f_n(3x-2)/2, & 2/3 \le x \le 1 \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

1. Für alle $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \le \frac{1}{2} \max_{z \in [0,1]} |f_n(z) - f_{n-1}(z)|$.
2. Für alle $x \in [0,1]$ ist $(f_n(x))_{n \ge 0}$ eine Cauchy-Sequenz und somit existiert $F = \lim_{n \to \infty} f_n$.
3. F ist stetig.

Lösung.

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden drei Fälle. Die Aussage ist klar für $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Sei also $x \le 1/3$. Dann ist

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \tfrac{1}{2}|f_n(3x) - f_{n-1}(3x)| \le \tfrac{1}{2} \max_{z \in [0,1]} |f_n(z) - f_{n-1}(z)|.$$

   Sei nun $x \ge 2/3$. Ähnlich folgt

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \tfrac{1}{2}|f_n(3x-2) - f_{n-1}(3x-2)| \le \tfrac{1}{2} \max_{z \in [0,1]} |f_n(z) - f_{n-1}(z)|.$$

2. Sei $n \ge m \ge 0$. Es ist

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= \left| \sum_{i=m+1}^{n} f_i(x) - f_{i-1}(x) \right| \le \sum_{i=m+1}^{n} |f_i(x) - f_{i-1}(x)| \\ &\le \sum_{i=m+1}^{n} 2^{-i+1} \cdot \max_z |f_1(z) - f_0(z)| \le 2^{-m} \sum_{i \ge 0} 2^{-i} = 2^{-m+1} \xrightarrow{m \to \infty} 0. \end{aligned}$$

   Also ist (f_n) eine Cauchy-Folge. Derselbe Beweis für $n = \infty$ (also die Betrachtung von $|F(x) - f_m(x)|$) liefert sogar gleichmäßige Konvergenz von (f_n).

3. Die Stetigkeit von F folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n).

Aufgabe Z4.2

Für jede Primzahl p sei A_p die Menge aller Vielfachen von p. Zeigen Sie, dass es kein W-Maß P auf $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ gibt, so dass

1. $P(A_p) = 1/p$ und
2. $(A_p)_{p \text{ Primzahl}}$ ist unabhängig.

Lösung. Wir nennen $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen. Nehme an, ein Maß P mit den obigen Eigenschaften existiert. Setze $A = \limsup_{p\in\mathbb{P}} A_p$. Mit dem Satz von Euler wissen wir, dass die Reihe der reziproken Primzahlen divergiert, also $\sum_{p\in\mathbb{P}} P(A_p) = \sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-1} = \infty$.
Doch nun folgt mit dem Borel-Cantelli-Lemma, dass $P(A) = 1$. Damit ist A^c, die Menge der Zahlen, die nur endlich viele Primfaktoren besitzen, eine Nullmenge, was uns zu einem Widerspruch führt.

Aufgabe Z4.3

1. Konstruieren Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum, der den unendlichen, fairen Würfelwurf $\Omega = \{1, \dots, 6\}^{\mathbb{N}}$ modelliert. Es soll also $P((\omega_1, \dots, \omega_n)) = 6^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. Definiere weiterhin $A_n(k) = \{\omega_n = \ldots = \omega_{n+k} = 6\}$ das Ereignis, dass Wurf n bis $n+k$ Ergebnis 6 zeigen. Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{N}_0$

$$P(\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n(k)) = 1, \quad P(\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n(k)) = 0.$$

Lösung.

1. Sei $X : \mathbb{R} \to \{1, \dots, 6\}^{\mathbb{N}}$ die Abbildung, die dem nicht ganzzahligen Teil einer reellen Zahl dessen Darstellung zur Basis 6 zuordnet (also $6 \equiv 0$). Definieren wir nun $\Omega = X([0,1]), \mathcal{A} = X(\mathcal{B}([0,1]))$ und $P = \lambda \circ X^{-1}$, wobei λ das Lebesgue-Maß bezeichnet, erhalten wir den gewünschten W-Raum.
2. Es ist $P(\limsup_n A_n(k))$ das Lebesgue-Maß jener Zahlen, in deren Basis-6-Darstellung unendlich oft eine Sequenz von $k+1$ Sechsern auftritt. Dies ist das Maß aller Zahlen, deren Dezimaldarstellung nicht endlich oder periodisch ist, also $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$.
   Analog ist $P(\liminf_n A_n(k))$ das Lebesgue-Maß jener Zahlen, in deren Dezimaldarstellung ab einem bestimmten Punkt nur Sechser auftreten, die also eine endliche Darstellung in Basis 6 besitzen. Solche Zahlen sind rational und bilden eine Nullmenge.

Aufgabe Z4.4

(a) Finden Sie eine Familie von paarweise unabhängigen Ereignissen, die nicht unabhängig ist.
(b) Finden Sie drei Ereignisse A, B, C auf einem W-Raum, sodass $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, aber A, B, C nicht paarweise unabhängig sind.
(c) Finden sie eine Kollektion von $n+1$ abhängigen Ereignissen, sodass je n davon unabhängig sind.

Lösung.

(a) Sei $\Omega = \{112, 121, 211, 222\}$, P die Gleichverteilung A_i das Ereignis, das die i-te Stelle den Wert 1 hat. Dann ist $P(A_i) = 1/2$ für $i = 1, 2, 3$ und

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}.$$

Jedoch ist $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$, die Ereignisse sind also abhängig.

(b) Es sei $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2 = [6]^2$ der zweifache Münzwurf und P die Gleichverteilung. Es sei A der Ereignise, dass der erste Würfel 1,2 oder 3 zeigt, B das Ereignis, dass der erste Würfel 3,4 oder 5 zeigt, und C das Ereignis, dass die Summe beider Würfe 9 ergibt. Dann ist $A \cap B = \{(3, i), i \in [6]\}, A \cap C = \{(3, 6)\}, B \cap C = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4)\}, A \cap B \cap C = \{(3, 6)\}$ und weiter $P(A) = P(B) = 1/2$ sowie $P(C) = 1/9$.
Also ist $P(A)P(B)P(C) = 1/36 = P(A \cap B \cap C)$ und es lässt sich leicht nachrechnen, dass keines der drei Paare unabhängig ist.

(c) Betrachte die Punktemenge $[n+1]$ in der Ebene in allgemeiner Position (keine drei auf einer Geraden) sowie die $\binom{n+1}{2}$ Verbindungslinien (Kanten) zwischen ihnen. Alternativ können wir uns auch den vollständigen Graphen auf $n + 1$ Knoten vorstellen. Wir orientieren nun jede Kante $\{i, j\}$ $(i \neq j)$ mit Wahrscheinlichkeit jeweils 1/2 als (i, j) in Richtung von j oder als (j, i) in Richtung von i.
Sei A_k für $k \in [n + 1]$ das Ereignis, dass die Anzahl der in Richtung von Punkt k gerichteten Kanten gerade ist. Nenne die Anzahl solcher Kanten den Grad von k
Dann ist $P(A_k) = 1/2$: Induktiv sieht man, dass genau die Hälfte aller Orientierungen der ersten $n - 1$ zu k inzidenten Kanten in geradem Grad von k endet. Das Orientieren der n-ten Kante macht genau die andere Hälfte aller Konfiguration zu solchen, in denen k geraden Grad hat.
Analog zeigt man, dass für $i_1, \dots, i_k \in [n + 1]$, $k \leq n$ die Gleichung $P(\cap_k A_{i_k}) = 2^{-k}$ gilt. Jedoch ist $P(\cap_k A_k) \neq 2^{-n-1}$, da Wissen um das Eintreten der ersten n Ereignisse A_k die Parität des Grads des letzten Punkts als gerade festlegt (die Gesamtsumme der Kanten ist gerade).

Übungsaufgaben

Aufgabe Ü4.5

Sei X ein stetiger Zufallsvektor. Zeigen Sie, dass auch F_X stetig ist.

Lösung. Per Definition ist P_X absolut stetig zum Lebesgue-Maß λ, es existiert nach dem Satz von Radon-Nikodym also f_X, sodass $P_X(A) = \int_A f_X \, \mathrm{d}\lambda$, also

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t) \lambda(\mathrm{d}t),$$

was stetig in x ist (Hauptsatz).

Aufgabe Ü4.6

Sei $I \subseteq \mathbb{N}$ und $(A_i)_{i \in I}$ unabhängig. Zeigen Sie

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = 1 - \prod_{i \in I} (1 - P(A_i)).$$

Lösung. Wir beobachten, dass $P(\cup_{i\in I} A_i) = 1 - P(\cap_{i\in I} A_i^c)$. Definiere $B_n := \cap_{I\ni i\leq n} A_i^c$. Dann gilt $B_n \searrow \cap_{i\in I} A_i^c$ und aufgrund der Unabhängigkeit der A_i zudem $P(B_n) = \prod_{I\ni i\leq n} P(A_i^c)$. Mit Satz 1.17 folgt also

$$P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 1 - P(\lim_{n\to\infty} B_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(B_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} \prod_{I\ni i\leq n} P(A_i^c) = 1 - \prod_{i\in I} P(A_i^c),$$

was zu zeigen war.

Aufgabe Ü4.7

Sei ein W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gegeben.

(a) Zeigen Sie Linearität des Erwartungswertes: Für Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^n a_i X_i] = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}[X_i]$.

(b) Zeigen Sie, dass sich die Linearität aus (a) auf abzählbare Folgen ausweiten lässt, falls $P(X_i \geq 0) = 1$ und $a_i \geq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

(c) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $P(X \in I) = 1$ und $X \in \mathcal{L}^1(P)$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[X] \in I$.

(d) Sei $X \in \mathcal{L}^1(P)$ auf einem W-Raum und sei $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{V}\mathrm{ar}[aX + b] = a^2 \mathbb{V}\mathrm{ar}[X]$.

(e) Zeigen Sie: $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = 0 \iff P(X = c) = 1$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

(f) Seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen mit $X_i \in \mathcal{L}^1(P)$. Zeigen sie, dass

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E}[X_i X_j] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j].$$

Bemerkung: Es wird $\mathbb{C}\mathrm{ov}[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$ die Kovarianz von X und Y genannt.

Lösung.

(a,b) Folgt direkt aus der Linearität des Integrals und mit monotoner Konvergenz.

(c) Sei $I \subseteq [a, b]$. Es ist

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X \,\mathrm{d}P = \int_I X \,\mathrm{d}P \begin{cases} \leq b \int_I \,\mathrm{d}P = b, \\ \geq a \int_I \,\mathrm{d}P = a. \end{cases}$$

(d) Es ist

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\mathrm{ar}[aX + b] &= \mathbb{E}[(aX + b)^2] - \mathbb{E}[aX + b]^2 = a^2\mathbb{E}[X^2] + 2ab\mathbb{E}[X] + b^2 - (a\mathbb{E}[X] + b)^2 \\ &= a^2(\mathbb{E}[X^2] - E[X]^2) = a^2 \mathbb{V}\mathrm{ar}[X]. \end{aligned}$$

(e) Sei zuerst $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = 0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}[X]}{\varepsilon} = 0,$$

also $P(X = \mathbb{E}[X]) = 1$. Nehme nun an, dass $P(X = c) = 1$ Damit ist $\mathbb{E}[X^2] = c^2 = \mathbb{E}[X]^2$, also $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = 0$.

(f) Wir bemerken zuerst, dass $\mathbb{C}\mathrm{ov}[X,Y] = \mathbb{E}[XY - \mathbb{E}[X]Y - X\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$. Des Weiteren ist

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\mathrm{ar}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2\right] - \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]\right)^2 = \mathbb{E}\left[\sum_{i,j=1}^n X_iX_j\right] - \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] \\ &= \sum_{i,j=1}^n (\mathbb{E}[X_iX_j] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]) = \sum_{i,j=1}^n \mathbb{C}\mathrm{ov}[X_i, X_j].\end{aligned}$$

Aufgabe Ü4.8

Sei ein W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) Für eine Zufallsvariable X mit Werten in $\mathbb{N}_0$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n\geq 1} P(X \geq n).$$

(b) Für eine Zufallsvariable X mit Werten in $[0, \infty]$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty P(X > t)\,\mathrm{d}t.$$

Lösung.

(a) Es ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{n\geq 1} nP(X = n) = \sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^n P(X = n) = \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1} P(X = n)\cdot \mathbb{1}_{\{k\leq n\}} \\ &= \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq 1} P(X = n)\cdot \mathbb{1}_{\{n\geq k\}} = \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq k} P(X = n) = \sum_{k\geq 1} P(X \geq k),\end{aligned}$$

wobei die Reihen vertauscht werden dürfen, da alle Argumente nichtnegativ sind.

(b) Es ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_\Omega X\,\mathrm{d}P = \int_\Omega \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{X>t\}}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}P = \int_0^\infty \left(\int_\Omega \mathbb{1}_{\{X>t\}}\,\mathrm{d}P\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty P(X > t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

wobei der Satz von Fubini-Tonelli zum Vertausch der Integrale benutzt wurde.

Aufgabe Ü4.9

(a) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge an Zufallsvektoren auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Gelte des Weiteren $\lim_{n\to\infty} P(X_n \in A) = 1$ für ein $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie dass mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ mit $X_k \in A$ existieren.

(b) Finden Sie eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Ereignissen, sodass

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) = \infty, \qquad \text{aber} \quad P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

Lösung.

(a) Da $\lim_{n\to\infty} P(X_n \notin A) = 0$ gibt es eine Teilfolge $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (X_n), sodass

$$P(X_{n_k} \notin A) < \frac{1}{k^2}.$$

Also ist $\sum_{k\geq 1} P(X_{n_k} \notin A) < \infty$. Nach dem Borel-Cantelli-Lemma kann es nur endlich viele Werte für k geben, sodass $X_{n_k} \notin A$. Das zeigt die Behauptung.

(b) Sei $\Omega = [0,1], \mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$ und λ das Lebesgue-Maß. Definiere $A_n := [0, \frac{1}{n}]$. Dann ist

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n\geq m} A_n = \{\omega : \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\} = \emptyset,$$

aber $\lambda(A_n) = \frac{1}{n}$ und daher $\sum_{n\geq 1} \lambda(A_n) = \infty$.