Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 4

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Zentralübungsaufgaben

Aufgabe Z4.1

In dieser Aufgabe werden wir die Cantor-Funktion aus der Vorlesung untersuchen. Sei $f_0 : [0,1] \to [0,1]$ gegeben durch $f_0(x) = x$ und für $n \in \mathbb{N}_0$

$$f_{n+1} : [0,1] \to [0,1], \qquad f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(3x)/2, & 0 \le x \le 1/3 \\ 1/2, & 1/3 \le x \le 2/3 \\ 1/2 + f_n(3x-2)/2, & 2/3 \le x \le 1 \end{cases} .$$

Zeigen Sie:

1. Für alle $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \le \frac{1}{2} \max_{z \in [0,1]} |f_n(z) - f_{n-1}(z)|$.
2. Für alle $x \in [0,1]$ ist $(f_n(x))_{n \ge 0}$ eine Cauchy-Sequenz und somit existiert $F = \lim_{n\to\infty} f_n$.
3. F ist stetig.

Aufgabe Z4.2

Für jede Primzahl p sei A_p die Menge aller Vielfachen von p. Zeigen Sie, dass es kein W-Maß P auf $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ gibt, so dass

1. $P(A_p) = 1/p$ und
2. $(A_p)_{p \text{ Primzahl}}$ ist unabhängig.

Aufgabe Z4.3

1. Konstruieren Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum, der den unendlichen, fairen Würfelwurf $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^{\mathbb{N}}$ modelliert. Es soll also $P((\omega_1, \ldots, \omega_n)) = 6^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. Definiere weiterhin $A_n(k) = \{\omega_n = \ldots = \omega_{n+k} = 6\}$ das Ereignis, dass Wurf n bis $n+k$ Ergebnis 6 zeigen. Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{N}_0$

$$P(\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n(k)) = 1, \quad P(\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n(k)) = 0.$$

Aufgabe Z4.4

(a) Finden Sie eine Familie von paarweise unabhängigen Ereignissen, die nicht unabhängig ist.
(b) Finden Sie drei Ereignisse A, B, C auf einem W-Raum, sodass $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, aber A, B, C nicht paarweise unabhängig sind.
(c) Finden sie eine Kollektion von $n+1$ abhängigen Ereignissen, sodass je n davon paarweise unabhängig sind.

Übungsaufgaben

Aufgabe Ü4.5

Sei X ein stetiger Zufallsvektor. Zeigen Sie, dass auch F_X stetig ist.

Aufgabe Ü4.6

Sei $I \subseteq \mathbb{N}$ und $(A_i)_{i\in I}$ unabhängig. Zeigen Sie

$$P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 1 - \prod_{i\in I}(1 - P(A_i)).$$

Aufgabe Ü4.7

Sei ein W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gegeben.

(a) Zeigen Sie Linearität des Erwartungswertes: Für Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbf{E}[\sum_{i=1}^n a_i X_i] = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{E}[X_i]$.

(b) Zeigen Sie, dass sich die Linearität aus (a) auf abzählbare Folgen ausweiten lässt, falls $P(X_i \geq 0) = 1$ und $a_i \geq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

(c) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $P(X \in I) = 1$ und $X \in \mathcal{L}^1(P)$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{E}[X] \in I$.

(d) Sei $X \in \mathcal{L}^1(P)$ auf einem W-Raum und sei $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{Var}[aX + b] = a^2\mathbf{Var}[X]$.

(e) Zeigen Sie: $\mathbf{Var}[X] = 0 \iff P(X = c) = 1$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

(f) Seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen mit $X_i \in \mathcal{L}^1(P)$. Zeigen sie, dass

$$\mathbf{Var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i,j=1}^n \mathbf{E}[X_i X_j] - \mathbf{E}[X_i]\mathbf{E}[X_j].$$

Bemerkung: Es wird $\mathbb{C}\mathrm{ov}[X, Y] = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])]$ die Kovarianz von X und Y genannt.

Aufgabe Ü4.8

Sei ein W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) Für eine Zufallsvariable X mit Werten in $\mathbb{N}_0$ gilt

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{n \geq 1} P(X \geq n).$$

(b) Für eine Zufallsvariable X mit Werten in $[0, \infty]$ gilt

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^\infty P(X > t)\,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe Ü4.9

(a) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge an Zufallsvektoren auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Gelte des Weiteren $\lim_{n\to\infty} P(X_n \in A) = 1$ für ein $A \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie dass mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ mit $X_k \in A$ existieren.

(b) Finden Sie eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Ereignissen, sodass

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) = \infty, \qquad \text{aber} \quad P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$