Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 3: Lösungen

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Zentralübungsaufgaben

Aufgabe Z3.1

Seien μ_1, μ_2, ν Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$, und sei $\mu_1, \mu_2 \perp \nu$. Ferner seien $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $\mu = a_1\mu_1 + a_2\mu_2$ ein signiertes Maß ist. Zeigen Sie, dass $\mu \perp \nu$.

Lösung. Nach Angabe existieren N_1, N_2, sodass $\nu(N_i) = 0, \mu_i(N_i^c) = 0$ für $i = 1, 2$. Wir behaupten, dass $N := N_1 \cup N_2$ die gesuchte Menge ist, also dass $\nu(N) = 0, \mu(N^c) = 0$:

- Es ist $\nu(N) \leq \nu(N_1) + \nu(N_2) = 0$ sowie
- $\mu_i(N^c) \leq \mu_i(N_i^c) = 0$ für $i = 1, 2$, da $N^c \subseteq N_i^c$. Also gilt $\mu(N^c) = a_1\mu_1(N^c) + a_2\mu_2(N^c) = 0$.

Aufgabe Z3.2

Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 1.36 zur Lebesgue'schen Zerlegung.

(1) Zeigen Sie die Eindeutigkeit der Zerlegung für endliche Maße μ, ν.

(2) Zeigen Sie die Existenz und die Eindeutigkeit der Zerlegung für σ-endliche Maße μ, ν.

Lösung.

(1) Wir nehmen an, es gibt zwei Zerlegungen $\mu_a + \mu_s = \mu = \tilde{\mu}_a + \tilde{\mu}_s$, wobei $\mu_a \ll \nu, \tilde{\mu}_a \ll \nu$ und $\mu_s \perp \nu \perp \tilde{\mu}_s$. Es ist also

$$\lambda_a := \mu_a - \tilde{\mu}_a = \tilde{\mu}_s - \mu_s =: \lambda_s.$$

Per Definition ist $\lambda_a \ll \nu$ und nach Z3.1 ist $\lambda_s \perp \nu$, es existiert also eine ν-Nullmenge N mit $\lambda_s(N^c) = 0$. Für beliebiges $A \in \mathcal{A}$ gilt nun

$$\lambda_a(A) = \lambda_s(A) = \lambda_s(A \cap N) = \lambda_a(A \cap N) = 0$$

und daher $\mu_a(A) = \tilde{\mu}_a(A)$ als auch $\mu_s(A) = \tilde{\mu}_s(A)$.

(2) Wir behaupten, es gibt eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ disjunkter Mengen, sodass $\Omega = \cup_n A_n$ und $\nu(A_n) < \infty$ als auch $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$: Da beide Maße σ-endlich sind, existieren solche Folgen $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}, (Y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ für jeweils ν und μ, durch Schnittbildung $A_{k,l} = X_k \cap Y_l$ und Umordnung erhalten wir die Folge (A_n).
<u>Existenz:</u> Definiere nun $\nu_n(A) = \nu(A_n \cap A), \mu_n(A) = \mu(A_n \cap A)$, d.h. die Einschränkung von ν bzw. μ auf A_n, für die $\mu = \sum_n \mu_n$ sowie $\nu = \sum_n \nu_n$ gilt. Da diese Einschränkungen

endlich sind, gibt es eine Zerlegung $\mu_n = \mu_{n,a} + \mu_{n,s}$ mit $\mu_{n,s} \perp \nu$ und $\mu_{n,a}(A) = \int_A f_n \, \mathrm{d}\nu$ (man beachte, dass die für den endlichen Fall garantierte Zerlegung für das endliche Maß ν_n gilt, aber direkt auf ν erweitert werden kann). Nach Konstruktion können wir annehmen dass $f_n(\omega) = 0$ für alle $\omega \in A_n^c$, also $f_{n}|_{A_n^c} \equiv 0$. Wir definieren nun

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n, \quad \mu_a = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_{n,a}, \qquad \mu_s = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_{n,s}.$$

Dann ist $\mu = \mu_a + \mu_s$, es ist $\mu_a \ll \nu$ und außerdem gilt $\mu_s \perp \nu$ (Beweis hierfür analog zu Z3.1). Schließlich gilt

$$\mu_a(A) = \sum_n \mu_{n,a}(A) = \sum_n \int_A f_n \, \mathrm{d}\nu = \int_A \sum_n f_n \, \mathrm{d}\nu = \int_A f \, \mathrm{d}\nu$$

mit monotoner Konvergenz.
<u>Eindeutigkeit:</u> Gibt es eine andere Zerlegung $\mu = \tilde{\mu}_a + \tilde{\mu}_s$, so ziehen wir uns auf deren (endliche) Einschränkung auf A_n zurück. Dort ist die Zerlegung jedoch identisch nach (1) und dies gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\mu_a = \tilde{\mu}_a$ und $\mu_s = \tilde{\mu}_s$.

Aufgabe Z3.3

Für σ-endliche Maße μ, ν auf $(\Omega, \mathcal{A})$ besagt der Satz von Radon-Nikodym, dass

$$\mu \ll \nu \Leftrightarrow \exists f \geq 0 : \mu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\nu \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Zeigen Sie, dass f eindeutig fast überall bzgl. ν ist.

Lösung. Seien f_1, f_2 zwei Dichten, sodass

$$\mu(A) = \int_A f_1 \, \mathrm{d}\nu = \int_A f_2 \, \mathrm{d}\nu \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Sei nun $A_n = \{f_1 \geq f_2 + \frac{1}{n}\}, B_n = \{f_2 \geq f_1 + \frac{1}{n}\}$. Also ist

$$\int_{A_n} f_2 \, \mathrm{d}\nu = \int_{A_n} f_1 \, \mathrm{d}\nu \geq \int_{A_n} \left(f_2 + \frac{1}{n}\right) \mathrm{d}\nu,$$

woraus folgt, dass $\nu(A_n) = 0$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Analog ergibt sich $\nu(B_n) = 0$ und daher $\nu(\{f_1 \neq f_2\}) = 0$.

Aufgabe Z3.4

(a) Folgern Sie den Satz von Radon-Nikodym aus dem Satz der Lebesgue'schen Zerlegung.

(b) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass im Satz von Radon-Nikodym auf die σ-Endlichkeit von ν nicht verzichtet werden kann.

Lösung.

(a) Aus der Lebesgue-Zerlegung erhalten wir $\mu = \mu_a + \mu_s$. Da des Weiteren $\mu_a \ll \nu$ und $\mu \ll \nu$, muss auch $\mu_s \ll \nu$. Mit der Folgerung $(\mu_s \perp \nu) \wedge (\mu_s \ll \nu) \Rightarrow \mu_s \equiv 0$ erhalten wir jedoch direkt, dass $\mu = \mu_a$ die gewünschte Form hat.

(b) Sei $\Omega = [0,1], \mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$. Sei weiterhin μ das Lebesgue-Maß und ν das Zählmaß, d.h. ν ordnet einer Menge A ihre Kardinalität zu.
Dann ist ν nicht σ-endlich, aber $\mu \ll \nu$, denn: $\nu(A) = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$.
Nehme nun an, es existiert eine Dichte $f \geq 0$ mit $\mu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\nu$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Für $\bar{\omega} \in [0,1]$ gilt dann jedoch

$$f(\bar{\omega}) = \int_{\{\bar{\omega}\}} f(\omega) \,\mathrm{d}\nu(\omega) = \mu(\{\bar{\omega}\}) = 0.$$

Also ist $f \equiv 0$, was einen Widerspruch bedeutet.

Übungsaufgaben

Aufgabe Ü3.5

Seien μ, ν zwei σ-endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Sei $\mu \ll \nu$ und f die Dichte von μ bzgl. ν. Sei weiterhin eine messbare Funktion g gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\int_A g \cdot f \,\mathrm{d}\nu = \int_A g \,\mathrm{d}\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zuerst für einfache Funktionen.

Lösung. Der Beweis verwendet maßtheoretische Induktion:

- Sei $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ für $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ und $n \in \mathbb{N}$, also g einfach. Mit Linearität des Integrals gilt dann

$$\int_A g \cdot f \,\mathrm{d}\nu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_\Omega f \cdot \mathbb{1}_{A \cap A_i} \,\mathrm{d}\nu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{A \cap A_i} f \,\mathrm{d}\nu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A \cap A_i) = \int_A g \,\mathrm{d}\mu.$$

- Sei nun $g \geq 0$ messbar. Sei $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge einfacher Funktionen mit $0 \leq g_n \nearrow g$ (siehe Lemmas 1.25, 1.26). Unter zweimaliger Anwendung des Satzes der monotonen Konvergenz folgt

$$\int_A g \cdot f \,\mathrm{d}\nu = \lim_{n \to \infty} \int_A g_n \cdot f \,\mathrm{d}\nu = \lim_{n \to \infty} \int_A g_n \,\mathrm{d}\mu = \int_A g \,\mathrm{d}\mu.$$

- Sei nun $g \in \mathcal{L}^1(\nu)$. Damit ist $g = g^+ - g^-$ in Positiv- und Negativteil mit $g^+, g^- \geq 0$ und messbar zerlegbar. Nach obigen Beobachtungen gilt die Aussage für g^+ und g^-, mit Linearität also auch für g.

Aufgabe Ü3.6

(a) Seien P, Q zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und sei weiterhin μ ein σ-endliches Maß, sodass $P \ll \mu, Q \ll \mu$. Seien weiterhin $f_P = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\mu}, f_Q = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\mu}$ die beiden zugehörigen Dichten. Zeigen Sie dass (f, N) eine Lebesgue-Zerlegung von P bzgl. Q ist, wobei

$$f = \frac{f_P}{f_Q} \mathbf{1}_{\{f_Q > 0\}} \quad \text{und} \quad N = \{f_Q = 0\}.$$

(b) Sei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$. Definiere für eine endliche Borel-Menge $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Gleichverteilung $\mathcal{U}_\Omega$ als $\mathcal{U}_\Omega(A) = \lambda(A)/\lambda(\Omega)$ für alle Borel-Mengen $A \subseteq \Omega$. Seien $P = \mathcal{U}_{(0,2)}$ und $Q = \mathcal{U}_{(-1,1)}$ die Gleichverteilungen auf den Intervallen $(0,2)$ bzw. $(-1,1)$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Berechnen Sie die Lebesgue-Zerlegung von P bzgl. Q.

Lösung.

(a) Für beliebiges $A \in \mathcal{A}$ schreiben wir

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \{f_Q = 0\}) + P(A \cap \{f_Q > 0\}) \\ &= P(A \cap N) + \int_A \mathbb{1}_{\{f_Q > 0\}} \, \mathrm{d}P \\ &= P(A \cap N) + \int_A \mathbb{1}_{\{f_Q > 0\}} \cdot \frac{f_Q}{f_Q} \cdot f_P \, \mathrm{d}\mu \\ &= P(A \cap N) + \int_A f \cdot f_Q \, \mathrm{d}\mu \\ &= P(A \cap N) + \int_A f \, \mathrm{d}Q. \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$Q(N) = \int_N f_Q \, \mathrm{d}\mu = \int \mathbb{1}_{\{f_Q = 0\}} \cdot f_Q \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

(b) Es ist $\lambda((-1,1)) = 2 = \lambda((0,2))$ und damit gilt nach Definition von $\mathcal{U}$, dass $f_P = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{(0,2)}, f_Q = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{(-1,1)}$. Damit ist nach (a) also $N = \mathbb{R} \setminus (-1,1)$ und $f = \mathbb{1}_{(0,1)}$, oder auch

$$P(A) = P(A \cap N) + \int_A f \, \mathrm{d}Q.$$

Aufgabe Ü3.7

Seien λ, μ, ν drei σ-endliche Maße auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\mu \ll \nu$.

(a) Finden Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}$, unter welcher die beiden Maße sogar äquivalent sind. *Hinweis: Aufgabe Ü3.5 kann hier hilfreich sein.*

(b) Es gelte zusätzlich $\lambda \ll \nu$. Zeigen Sie, dass ν-fast-überall

$$\frac{\mathrm{d}(\lambda + \mu)}{\mathrm{d}\nu} = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\nu} + \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}.$$

(c) Es gelte $\lambda \ll \mu \ll \nu$. Zeigen Sie, dass ν-fast-überall

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\nu} = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu} \cdot \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}.$$

(d) Es gelte zusätzlich $\nu \ll \mu$. Zeigen Sie, dass ν-fast-überall

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} = \left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\right)^{-1}.$$

Lösung.

(a) Wir behaupten: $\mu \approx \nu \iff f = \frac{d\mu}{d\nu} > 0$ ν-fast-sicher.

$\Rightarrow$ Betrachten wir das Ereignis $N = \{f = 0\}$, so ist

$$\mu(N) = \int_N f \,d\nu = \int \mathbb{1}_{\{f=0\}} \cdot f \,d\nu = 0.$$

Da $\mu \approx \nu$, muss also auch $\nu(N) = 0$ und damit $f > 0$ ν-fast-sicher.

$\Leftarrow$ Setze $\Omega' = \{f > 0\}$ – es gilt also $\nu(\Omega \setminus \Omega') = 0$. Sei nun $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$. Dann ist

$$\nu(A) = \nu(A \cap \Omega') = \int_{A\cap\Omega'} \frac{1}{f} \cdot f \,d\nu \overset{\text{Ü3.5}}{=} \int_{A\cap\Omega'} \frac{1}{f} \,d\mu \overset{\mu(A)=0}{=} 0$$

und somit $\nu \ll \mu$.

(b) Für $A \in \mathcal{A}$ ist

$$(\mu + \lambda)(A) = \mu(A) + \lambda(A) = \int_A \frac{d\mu}{d\nu} \,d\nu + \int_A \frac{d\lambda}{d\nu} \,d\nu = \int_A \left(\frac{d\mu}{d\nu} + \frac{d\lambda}{d\nu} \right) d\nu.$$

(c) Für $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\lambda(A) = \int_A d\lambda \overset{\text{Ü3.5}}{=} \int_A \frac{d\lambda}{d\mu} \,d\mu \overset{\text{Ü3.5}}{=} \int_A \frac{d\lambda}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\nu} \,d\nu.$$

(d) Die Aussage folgt aus dem Beweis in (a):

$$\nu(A) = \int_A \mathbb{1}_{\Omega'} \left(\frac{d\mu}{d\nu} \right)^{-1} d\mu,$$

d.h. die Dichte von ν bzgl. μ entspricht $(d\mu/d\nu)^{-1}$ bis auf der Nullmenge $\Omega \setminus \Omega'$.