Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 3

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Zentralübungsaufgaben

Aufgabe Z3.1

Seien μ_1, μ_2, ν Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$, und sei $\mu_1, \mu_2 \perp \nu$. Ferner seien $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $\mu = a_1\mu_1 + a_2\mu_2$ ein signiertes Maß ist. Zeigen Sie, dass $\mu \perp \nu$.

Aufgabe Z3.2

Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 1.36 zur Lebesgue'schen Zerlegung:

(1) Zeigen Sie die Eindeutigkeit der Zerlegung für endliche Maße μ, ν, d.h., zeigen Sie dass es eindeutige Maße μ_a, μ_s gibt mit $\mu = \mu_a + \mu_s$ und $\mu_a \ll \nu, \mu_s \perp \nu$.

(2) Zeigen Sie die Existenz und die Eindeutigkeit der Zerlegung für σ-endliche Maße μ, ν.

Aufgabe Z3.3

Für σ-endliche Maße μ, ν auf $(\Omega, \mathcal{A})$ besagt der Satz von Radon-Nikodym, dass

$$\mu \ll \nu \Leftrightarrow \exists f \geq 0 : \mu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\nu \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Zeigen Sie, dass f eindeutig fast überall bzgl. ν ist.

Aufgabe Z3.4

(a) Folgern Sie den Satz von Radon-Nikodym aus dem Satz der Lebesgue'schen Zerlegung.

(b) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass im Satz von Radon-Nikodym auf die σ-Endlichkeit von ν nicht verzichtet werden kann.

Übungsaufgaben

Aufgabe Ü3.5

Seien μ, ν zwei σ-endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Sei $\mu \ll \nu$ und f die Dichte von μ bzgl. ν. Sei weiterhin eine messbare Funktion g gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\int_A g \cdot f \, \mathrm{d}\nu = \int_A g \, \mathrm{d}\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zuerst für einfache Funktionen.

Aufgabe Ü3.6

(a) Seien P, Q zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und sei weiterhin μ ein σ-endliches Maß, sodass $P \ll \mu, Q \ll \mu$. Seien weiterhin $f_P = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\mu}$, $f_Q = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\mu}$ die beiden zugehörigen Dichten. Zeigen Sie dass (f, N) eine Lebesgue Zerlegung von P bzgl. Q ist, wobei

$$f = \frac{f_P}{f_Q} \mathbf{1}_{\{f_Q > 0\}} \quad \text{und} \quad N = \{f_Q = 0\}.$$

(b) Sei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$. Definiere für eine endliche Borel-Menge $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Gleichverteilung $\mathcal{U}_\Omega$ als $\mathcal{U}_\Omega(A) = \lambda(A)/\lambda(\Omega)$ für alle Borel-Mengen $A \subseteq \Omega$. Seien $P = \mathcal{U}_{(0,2)}$ und $Q = \mathcal{U}_{(-1,1)}$ die Gleichverteilungen auf den Intervallen $(0, 2)$ bzw. $(-1, 1)$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Berechnen Sie die Lebesgue-Zerlegung von P bzgl. Q.

Aufgabe Ü3.7

Seien λ, μ, ν drei σ-endliche Maße auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\mu \ll \nu$.

(a) Finden Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}$, unter welcher die beiden Maße sogar äquivalent sind. *Hinweis: Aufgabe Ü3.5 kann hier hilfreich sein.*

(b) Es gelte zusätzlich $\lambda \ll \nu$. Zeigen Sie, dass ν-fast-überall

$$\frac{\mathrm{d}(\lambda + \mu)}{\mathrm{d}\nu} = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\nu} + \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}.$$

(c) Es gelte $\lambda \ll \mu \ll \nu$. Zeigen Sie, dass ν-fast-überall

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\nu} = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu} \cdot \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}.$$

(d) Es gelte zusätzlich $\nu \ll \mu$. Zeigen Sie, dass ν-fast-überall

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} = \left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\right)^{-1}.$$