Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 2: Lösungen

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Zentralübungsaufgaben

Aufgabe Z2.1

Es sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\Omega \in \mathcal{E} \subseteq 2^\Omega$ ein $\cap$-stabiles Mengensystem. Weiter sei $\mathcal{H}$ ein reeller Vektorraum von beschränkten, reellwertigen Funktionen auf Ω mit folgenden Eigenschaften:

(i) $A \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{1}_A \in \mathcal{H}$.

(ii) Für $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq ...$ und $\mathcal{H} \ni f_n \to f$ punktweise mit f beschränkt gilt $f \in \mathcal{H}$.

Dann ist $\{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } (\Omega, \sigma(\mathcal{E}))\text{-}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))\text{-messbar und beschränkt}\} \subseteq \mathcal{H}$.

Lösung. Wir betrachten $\mathcal{D} := \{A \subset \Omega : \mathbb{1}_A \in \mathcal{H}\}$ und behaupten, dass $\mathcal{D}$ ein $\mathcal{E}$ enthaltendes Dynkin-System ist:

(D1) Es ist $\Omega \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$ nach Definition.

(D2) Seien $A, B \in \mathcal{D}$ mit $B \subseteq A$. Dann ist $\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B \in \mathcal{H}$, da $\mathcal{H}$ ein Vektorraum ist. Also $A \setminus B \in \mathcal{D}$.

(D3) Seien $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ Elemente aus $\mathcal{D}$. Mit $A := \cup_n A_n$ gilt dass $0 \leq \mathbb{1}_{A_n} \nearrow \mathbb{1}_A$ und daher $A \in \mathcal{H}$ nach Eigenschaft (ii).

Also ist $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}$ und somit $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}$ nach Satz 1.21.

$\Rightarrow$ $\mathbb{1}_A \in \mathcal{H}$ für $A \in \sigma(\mathcal{E})$.

$\Rightarrow$ Da $\mathcal{H}$ VR, gilt sogar, dass alle einfachen, $\sigma(\mathcal{E})$-messbaren Funktionen in $\mathcal{H}$ enthalten sind.

$\Rightarrow$ Für $0 \leq f : \Omega \to \mathbb{R}$ beschränkt und $\sigma(\mathcal{E})$-messbar existiert nach Lemma 1.25 eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\sigma(\mathcal{E})$-messbarer, einfacher Funktionen mit $f_n \nearrow f$. Wieder nach Eigenschaft (ii) ist also $f \in \mathcal{H}$.

$\Rightarrow$ Eine beschränkte und $\sigma(\mathcal{E})$-messbare Funktion f kann in Positiv- und Negativteil $f = f^+ - f^-$ zerlegt werden, welche nach obiger Folgerung in $\mathcal{H}$ enthalten sind. Also ist auch $f \in \mathcal{H}$.

Aufgabe Z2.2

(a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen mit $\cup_n A_n = A$. Zeigen Sie, dass

$$\int_A \varphi \,\mathrm{d}P = \sum_{n\geq 1} \int_{A_n} \varphi \,\mathrm{d}P.$$

(b) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ ein Maßraum und $0 \leq f \in \mathcal{L}^1(\nu)$. Zeigen Sie, dass durch $\mu(A) := \int_A f \,\mathrm{d}\nu, A \in \mathcal{A}$, ein bzgl. ν absolut stetiges Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert ist.

Lösung.

(a) In Hinblick auf (b) zeigen wir die Aussage für ein Maß ν. Es ist

$$\int_A \varphi \,\mathrm{d}\nu = \int \varphi \cdot \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\nu = \int \varphi \cdot (\sum_n \mathbb{1}_{A_n}) \,\mathrm{d}\nu = \int \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \varphi \cdot \mathbb{1}_{A_k} \,\mathrm{d}\nu$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int \sum_{k=1}^n \varphi \cdot \mathbb{1}_{A_k} \,\mathrm{d}\nu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \int \varphi \cdot \mathbb{1}_{A_k} \,\mathrm{d}\nu = \sum_{n\geq 1} \int_{A_n} \varphi \,\mathrm{d}\nu$$

mit dem Satz der monotonen Konvergenz.

(b) Es ist $\mu(A) \geq 0$, da $f \geq 0$. Des Weiteren ist $\mu(\emptyset) = \int_\emptyset f \,\mathrm{d}\nu = 0$. Für die σ-Additivität sei eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter, messbarer Mengen mit $\cup_n A_n = A$ gegeben. Dann ist

$$\mu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\nu \overset{(a)}{=} \sum_{n\geq 1} \int_{A_n} f \,\mathrm{d}\nu = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n).$$

Sei nun A mit $\nu(A) = 0$. Dann ist $\mu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\nu = 0$, also $\mu \ll \nu$.

Aufgabe Z2.3

Sei $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$ und $\overline{\mathcal{B}} := \{A \subseteq \overline{\mathbb{R}} : A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\overline{\mathcal{B}}$ eine σ-Algebra ist.

Sei des Weiteren $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}, n \in \mathbb{N}$, eine Folge $(\Omega, \mathcal{A})$-$(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$-messbarer Funktionen. Zeigen Sie:

(b) $\sup_{n\geq 1} f_n$ und $\inf_{n\geq 1}$ sind messbar.

(c) $\limsup_{n\geq 1} f_n$ und $\liminf_{n\geq 1}$ sind messbar.

Lösung.

(a) (i) Es ist $\overline{\mathbb{R}} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. (ii) Für $A \in \overline{\mathcal{B}}$ ist $\mathbb{R} \cap A^c = \mathbb{R} \setminus (A \cap \mathbb{R}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. (iii) Sei weiter (A_n) eine Folge messbarer Mengen in $\overline{\mathcal{B}}$ und $A = \cup_n A_n$. Dann ist $A \cap \mathbb{R} = \cup_n (A_n \cap \mathbb{R}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und somit $A \in \overline{\mathcal{B}}$.

(b) Setze $g = \sup_n f_n$ und $h = \inf_n f_n$. Die Messbarkeit folgt mit

$$g^{-1}((a, \infty)) = \{\omega \in \Omega : g(\omega) > a\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega : f_n(\omega) > a\},$$
$$h^{-1}((-\infty, a)) = \{\omega \in \Omega : h(\omega) < a\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega : f_n(\omega) < a\}$$

für $a \in \mathbb{R}$. Die rechten Seiten sind als abzählbare Vereinigung messbarer Mengen messbar und so sind g, h messbar auf den Urbildern der Erzeuer $\{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ bzw. $\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$

(c) Das Resultat folgt mit (b) und $\limsup_{n\geq 1} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} f_m$ und $\liminf_{n\geq 1} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} f_m$.

Aufgabe Z2.4

Seien μ, ν Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und sei ν endlich (also $\nu(\Omega) < \infty$).

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   (1) $\nu \ll \mu$,
   (2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \mu(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \varepsilon$.

(b) Zeigen Sie, dass (1)$\Rightarrow$(2) im Allgemeinen nicht gilt, falls ν nicht endlich ist.

Lösung. Wir bemerken zuerst, dass Satz 1.17 nicht nur für W-Maße, sondern für endliche Maße gilt (mit selbem Beweis).

(a) (1)⇒(2) Nehme an, (2) gilt nicht. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ und messbare Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mu(A_n) < 2^{-n}$ und $\nu(A_n) \geq \varepsilon$. Es gilt

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{m\geq n} A_m\right) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(\bigcup_{m\geq n} A_m\right) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{m\geq n} 2^{-m} = 0$$

und

$$\nu\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{m\geq n} A_m\right) \overset{\text{S1.17}}{=} \lim_{n\to\infty} \nu\left(\bigcup_{m\geq n} A_m\right) \geq \varepsilon > 0,$$

was im Widerspruch zu (1) steht.

(2)⇒(1) Sei $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ gegeben. Dann folgt mit (2), dass $\nu(A) < \varepsilon\ \forall \varepsilon > 0$, also $\nu(A) = 0$.

(b) Sei μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ und

$$\nu(A) = \int_A t^{-1}\, \mathrm{d}\mu(t).$$

Die Folge $A_n = (0, 1/n)$ erfüllt $\mu(A_n) \to 0$, aber $\nu(A_n) = \infty\ \forall n$.

Übungsaufgaben

Aufgabe Ü2.5

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $A \in \mathcal{A}$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass

$$\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\}$$

(a) ein Dynkin-System ist.
(b) $\cap$-stabil ist.

Lösung.

(a) Wir zeigen, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System ist:

(D1) $\mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\Omega) \cdot \mathbb{P}(A)$.

(D2) Seien $B, C \in \mathcal{D}$ mit $B \subseteq C$. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap (C \setminus B)) &= \mathbb{P}((A \cap C) \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= (\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B))\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(C \setminus B)\mathbb{P}(A).\end{aligned}$$

Also ist $C \setminus B \in \mathcal{D}$.

(D3) Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}$ mit $B_n \nearrow \cup_n B_n =: B$. Mit der σ-Stetigkeit von $\mathbb{P}$ gilt

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A \cap B_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),$$

also $B \in \mathcal{D}$.

(b) Betrachte als Gegenbeispiel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = (\{1,2,3,4\}, 2^\Omega, \mathcal{U}_\Omega)$, sowie des Weiteren $A = \{1,2\}, B = \{1,3\}, C = \{2,3\}$ und das System $\mathcal{D}$. Es gilt $B, C \in \mathcal{D}$, da $\mathbb{P}(A \cap X) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(X)$ für $X \in \{B, C\}$. Hingegen ist $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0 \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cap C)$.

Aufgabe Ü2.6

Ein Mengensystem $\mathcal{M} \subseteq 2^\Omega$ mit $\Omega \neq \emptyset$ heißt *monotone Klasse*, falls

(M1) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M},\ A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

(M2) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M},\ A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

Sei $\mathcal{M}$ eine monotone Klasse und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ eine Algebra. Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$.
Hinweis: Betrachten Sie die kleinste dieser monotonen Klassen und zeigen Sie, dass diese eine σ-Algebra ist.

Lösung. Wir beobachten zuerst, dass der Schnitt über eine beliebige Indexmenge $\mathcal{I}$ an monotonen Klassen $\mathcal{M}_i$, also $\cap_{i\in\mathcal{I}}\mathcal{M}_i$, wieder eine monotone Klasse bildet – die Eigenschaften (M1) und (M2) übertragen sich direkt.
Wir nutzen also den Hinweis und nehmen o.B.d.A. an, dass $\mathcal{M}$ der Schnitt aller monotonen Klassen ist, die $\mathcal{A}$ enthalten. Mit der Behauptung, dass $\mathcal{M}$ ein $\cap$-stabiles Dynkin-System und daher nach Lemma 1.22 eine σ-Algebra ist, folgt $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$ nach der Minimalität von $\sigma(\mathcal{A})$.

($\cap$)
- Wir behaupten zuerst, dass $\mathcal{M}_B := \{A \in \mathcal{M} : A \cap B \in \mathcal{M}\} \subseteq \mathcal{M}$ für ein $B \in \mathcal{A}$ eine monotone Klasse mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_B$ ist. Daraus folgt mit der Minimalität von $\mathcal{M}$, dass $\mathcal{M} = \mathcal{M}_B$ für alle $B \in \mathcal{A}$.
  Die Behauptung folgt direkt, da aufsteigende / fallende Folgen (A_n) unter dem Schnitt mit B nach wie vor aufsteigen / fallen. Des Weiteren ist $\mathcal{A}$ als Algebra $\cap$-stabil und daher $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_B$.
- Wir behaupten nun, dass obige Aussage auch für $B \in \mathcal{M}$ gilt, also $\mathcal{M}$ $\cap$-stabil ist. Hierfür verbleibt nur noch zu zeigen, dass $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_B$. Doch für beliebiges $A \in \mathcal{A}$ ist $B \in \mathcal{M}_A$, also $A \in \mathcal{M}_B$, was die Aussage zeigt.

(D1) Offensichtlich ist $\Omega \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$.

(D2) Wir behaupten, dass $\mathcal{M}' := \{A \in \mathcal{M} : A^c \in \mathcal{M}\} \subseteq \mathcal{M}$ ebenfalls eine monotone, $\mathcal{A}$ enthaltende Klasse ist. Daraus folgt erneut, dass $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$, womit $\mathcal{M}$ abgeschlossen unter Komplementbildung ist.
Für die Behauptung sehen wir zuerst, dass $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}'$, da $\mathcal{A}$ eine Algebra. Des Weiteren sei (A_n) eine aufsteigende Folge in $\mathcal{M}'$. Dann ist $(\cup_n A_n)^c \in \mathcal{M}$, da $(\cup_n A_n)^c = \cap_n A_n^c$ als Schnitt der absteigenden Folge $(A_n^c) \subseteq \mathcal{M}$ in $\mathcal{M}$ enthalten ist. Dies zeigt (M1), (M2) folgt analog.
Für $A, B \in \mathcal{M}$ mit $B \subseteq A$ folgt dann, dass $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{M}$.

(D3) Äquivalent zu (M1).

Aufgabe Ü2.7

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

(a) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge mit $0 \leq f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)\ \forall n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\int \sum_{n\geq 1} f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\geq 1} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

(b) Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \int |f| \cdot \mathbb{1}_{\{|f|\geq n\}} \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

(c) Sei f erneut μ-integrierbar. Zeigen Sie:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Lösung.

(a) Definiere $g_n := \sum_{k=1}^n f_k$. Dann ist $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots$ und mit dem Satz der monotonen Konvergenz folgt

$$\sum_{n\geq 1} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} g_n \,\mathrm{d}\mu = \int \sum_{n\geq 1} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

(b) Setzen wir $f_n := |f|\mathbb{1}_{|f|\geq n}$ und stellen die Ungleichung

$$\int |f| \,\mathrm{d}\mu \geq \int f_n \,\mathrm{d}\mu \geq n\mu(|f| \geq n)$$

um, so erhalten wir

$$\mu(|f| \geq n) \leq \int |f| \,\mathrm{d}\mu / n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Also ist $|f|$ fast überall endlich und folglich $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ fast überall. Wir haben also eine durch $|f|$ beschränkte Folge f_n, die fast überall gegen Null konvergiert. Die Behauptung ergibt sich daher aus dem Satz der majorisierten Konvergenz.

(c) Nach Aufgabe und mit Notation von (b) gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\int f_N \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon/2$. Setze nun $\delta := \frac{\varepsilon}{2N}$. Für beliebiges $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \delta$ gilt dann

$$\int_A |f|\mathbb{1}_{|f|<N} \,\mathrm{d}\mu \leq N \int_A \mathbb{1}_{|f|<N} \,\mathrm{d}\mu \leq N\mu(A) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Doch $|f| = |f|\mathbb{1}_{|f|<N} + |f|\mathbb{1}_{|f|\geq N}$, woraus das Ergebnis mit Integration folgt.

Aufgabe Ü2.8

Sei μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$.

(a) Finden Sie eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nichtnegativer, μ-messbarer Funktionen, die punktweise konvergiert, für die $\int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\mu$ nicht konvergiert.

(b) Finden Sie eine Folge $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ μ-messbarer Funktionen, sodass der punktweise Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ existiert, jedoch

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu \neq \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Lösung.

(a) Definiere

$$f_n = \begin{cases} n \cdot \mathbb{1}_{(0,\frac{1}{n}]} & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 2n \cdot \mathbb{1}_{(0,\frac{1}{n}]} & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Es gilt $f_n \to 0$ punktweise, aber $\int f_n \,\mathrm{d}\mu \in \{1, 2\}$, abhängig von der Parität von n.

(b) Definiere die Folge konstanter Funktionen $f_n = -\frac{1}{n}$, $f = 0$. Dann gilt offenbar $f_n \to 0$, aber

$$-\infty = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu \neq \int f \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Ein Beispiel nichtkonstanter Funktionen wäre $f_n(x) = g(x) \cdot \mathbb{1}_{\{x \geq n\}}$ und $f = 0$, wobei $g(x)$ eine nicht summierbare Funktion wie $1/x$ ist.