Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 2

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Zentralübungsaufgaben

Aufgabe Z2.1

Es sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\Omega \in \mathcal{E} \subseteq 2^\Omega$ ein $\cap$-stabiles Mengensystem. Weiter sei $\mathcal{H}$ ein reeller Vektorraum von beschränkten, reellwertigen Funktionen auf Ω mit folgenden Eigenschaften:

(i) $A \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{1}_A \in \mathcal{H}$.

(ii) Für $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq ...$ und $f_n \to f$ punktweise gilt $f \in \mathcal{H}$.

Dann ist $\{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } \sigma(\mathcal{E})\text{-messbar und beschränkt}\} \subseteq \mathcal{H}$.

Aufgabe Z2.2

(a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen mit $\cup_n A_n = A$. Zeigen Sie, dass

$$\int_A \varphi \,\mathrm{d}P = \sum_{n\geq 1} \int_{A_n} \varphi \,\mathrm{d}P.$$

(b) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ ein Maßraum und $0 \leq f \in \mathcal{L}^1(\nu)$. Zeigen Sie, dass durch $\mu(A) := \int_A f \,\mathrm{d}\nu$, $A \in \mathcal{A}$, ein bzgl. ν absolut stetiges Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert ist.

Aufgabe Z2.3

Sei $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$ und $\overline{\mathcal{B}} := \{A \subseteq \overline{\mathbb{R}} : A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\overline{\mathcal{B}}$ eine σ-Algebra ist.

Sei des Weiteren $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}, n \in \mathbb{N}$, eine Folge $(\Omega, \mathcal{A})$-$(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$-messbarer Funktionen. Zeigen Sie:

(b) $\sup_{n\geq 1} f_n$ und $\inf_{n\geq 1}$ sind messbar.

(b) $\limsup_{n\geq 1} f_n$ und $\liminf_{n\geq 1}$ sind messbar.

Aufgabe Z2.4

Seien μ, ν Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und sei ν endlich (also $\nu(\Omega) < \infty$).

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

  (1) $\nu \ll \mu$,

  (2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \mu(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \varepsilon$.

(b) Zeigen Sie, dass (1)$\Rightarrow$(2) im Allgemeinen nicht gilt, falls ν nicht endlich ist.

Übungsaufgaben

Aufgabe Ü2.5

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $A \in \mathcal{A}$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass

$$\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\}$$

(a) ein Dynkin-System ist.
(b) $\cap$-stabil ist.

Aufgabe Ü2.6

Ein Mengensystem $\mathcal{M} \subseteq 2^\Omega$ mit $\Omega \neq \emptyset$ heißt *monotone Klasse*, falls
(M1) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M},\ A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.
(M2) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M},\ A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.
Sei $\mathcal{M}$ eine monotone Klasse und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ eine Algebra. Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$.
Hinweis: Betrachten Sie die kleinste dieser monotonen Klassen und zeigen Sie, dass diese eine σ-Algebra ist.

Aufgabe Ü2.7

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

(a) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge mit $0 \leq f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)\ \forall n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\int \sum_{n\geq 1} f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\geq 1} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

(b) Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \int |f| \cdot \mathbb{1}_{\{|f|\geq n\}} \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

(c) Sei f erneut μ-integrierbar. Zeigen Sie:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Aufgabe Ü2.8

Sei μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$.

(a) Finden Sie eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nichtnegativer, μ-messbarer Funktionen, die punktweise konvergiert, für die $\int_\mathbb{R} f_n \,\mathrm{d}\mu$ nicht konvergiert.
(b) Finden Sie eine Folge $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ μ-messbarer Funktionen, sodass der punktweise Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ existiert, jedoch

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu \neq \int f \,\mathrm{d}\mu.$$