Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 1: Lösungen

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Zentralübungsaufgaben

Aufgabe Z1.1

Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge und

$$\mathcal{E} := \{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}$$

die Menge der einelementigen Teilmengen von Ω. Identifizieren Sie $\sigma(\mathcal{E})$ sowie alle $\sigma(\mathcal{E})$-messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Lösung. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden.
Fall 1: Ω ist abzählbar. Dann ist jede Teilmenge von Ω darstellbar als maximal abzählbare Vereinigung von Mengen in $\mathcal{E}$. Nach der Definition einer σ-Algebra ist demnach $\sigma(\mathcal{E}) = 2^\Omega$, die Potenzmenge von Ω. Jede Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist bezüglich dieser σ-Algebra messbar.
Fall 2: Ω ist überabzählbar. Wir behaupten, dass in diesem Fall

$$\sigma(\mathcal{E}) = \{A \subseteq \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ abzählbar}\} =: B$$

ist, das Mengensystem der abzählbaren/ko-abzählbaren Mengen.
$B \subseteq \sigma(\mathcal{E})$: Klarerweise müssen abzählbare Mengen in $\sigma(\mathcal{E})$ enthalten sein. Per Abgeschlossenheit unter Komplementbildung sind auch Komplemente abzählbarer Mengen in $\sigma(\mathcal{E})$.
$B \supseteq \sigma(\mathcal{E})$: Dies folgt aus der Tatsache, dass B eine σ-Algebra ist.

- $\Omega \in B$: klar.
- $A \in B$ impliziert A oder A^c abzählbar, d.h. $(A^c)^c = A$ oder A^c ist abzählbar. Nach Definition ist auch A^c in B.
- Sei $(A_n)_n$ eine Mengenfolge in B. Ist jedes A_n abzählbar, so ist auch $\bigcup_n A_n$ abzählbar. Gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ sodass A_i überabzählbar ist, so folgt aus

  $$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcap_n A_n^c \subseteq A_i^c$$

  die Abzählbarkeit des Komplements der Vereinigung. Nach Definition liegt Letztere wieder in B.

Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann messbar, wenn es eine abzählbare Menge A und ein $z \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(A^c) = \{z\}$.
Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ eine Borelmenge. Ist $z \in U$, so ist $f^{-1}(U) = A^c \cup W$, wobei W eine passende abzählbare Menge ist. Ist $z \notin U$, so ist $f^{-1}(U)$ abzählbar und in $\sigma(\mathcal{E})$.
Schließlich zeigen wir, dass alle messbaren Abbildungen die beschriebene Form haben. Angenommen es gibt z_1, z_2 in $\mathbb{R}$, sodass $f^{-1}(\{z_i\})$, $i = 1, 2$, überabzählbar ist. Dann ist keines

der beiden Urbilder messbar. Angenommen es gibt keinen Punkt $z \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $f^{-1}(\{z\})$ überabzählbar ist. Dann muss $f(\Omega)$ zwangsläufig überabzählbar sein. Mit einem Intervallschachtelungsargument finden wir zwei disjunkte Borelmengen, deren Urbilder unter f beide überabzählbar sind. Wiederum widerspricht dies der Messbarkeit von f.

Aufgabe Z1.2

Sei $\mathcal{A}$ das System aller Teilmengen $A \subseteq \mathbb{N}$, für welche

$$\mu(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{n}$$

existiert. Zeigen Sie, dass μ eine additive Mengenfunktion ist, die *nicht* σ-additiv ist.

Lösung. Klarerweise ist $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(\mathbb{N}) = 1$. Seien nun $A, B \in \mathcal{A}$ disjunkt. Dies impliziert dass für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $A \cap \{1, 2, ..., n\}$ und $B \cap \{1, 2, ..., n\}$ disjunkt sind. Da wir wir in diesem Fall für kein n Elemente doppelt zählen, können wir folgern

$$|(A \cup B) \cap \{1, 2, ..., n\}| = |A \cap \{1, 2, ..., n\}| + |B \cap \{1, 2, ..., n\}|,$$

was unmittelbar $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ zur Folge hat.
Leider ist μ nicht σ-additiv. Betrachte die Mengenfolge $A_k := \{k\}$, $k \in \mathbb{N}$, welche aus Elementen in $\mathcal{A}$ gebildet ist. Genauer ist $\mu(A_k) = 0$ für alle k, aber

$$\mu\left(\bigcup_k A_k\right) = \mu(\mathbb{N}) = 1 \neq 0.$$

$\mathcal{A}$ ist auch nur eine Algebra und keine σ-Algebra, d.h. das Mengensystem ist nicht abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen. Definiere für $i \in \mathbb{N}_0$

$$a_i = 2^i \cdot 3.$$

Weiterhin betrachten wir die Menge

$$A := \{1\} \cup \bigcup_{j=0}^{\infty} \left([a_{2j} + 1, a_{2j+1}] \cap \mathbb{N}\right).$$

Man kann induktiv zeigen, dass

$$\frac{|A \cap \{1, ..., a_{2j}\}|}{a_{2j}} = \frac{1}{3}, \quad \frac{|A \cap \{1, ..., a_{2j+1}\}|}{a_{2j+1}} = \frac{2}{3}, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

$j = 0$: Klar mit $a_0 = 3$ und $a_1 = 6$.
$j \to j + 1$: Nach Induktionsvoraussetzung und Definition von A ist

$$\frac{|A\cap\{1,...,a_{2j+2}\}|}{a_{2j+2}} = \frac{|A\cap\{1,...,a_{2j+1}\}|}{2a_{2j+1}} = \frac{1}{3},$$
$$\frac{|A\cap\{1,...,a_{2j+3}\}|}{a_{2j+3}} = \frac{|A\cap\{1,...,a_{2j+1}\}|+2a_{2j+1}}{4a_{2j+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

Obwohl A eine abzählbare Vereinigung von Einpunktmengen ist (die in $\mathcal{A}$ liegen müssen), ist A selbst kein Element von $\mathcal{A}$.

Aufgabe Z1.3

Beweisen Sie: Sei $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (was wir zum Beispiel als unendlichen Münzwurf interpretieren). Dann gibt es *keine* Abbildung $\mathbb{P} : 2^{\Omega} \to [0, 1]$ mit den Eigenschaften

(N) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
(A) $\mathbb{P}$ ist σ-additiv, d.h. für $A_1, A_2, \ldots \in \Omega$ paarweise disjunkt gilt

$$\mathbb{P}\left(\cup_n A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n),$$

(I) $\mathbb{P}$ besitzt folgende Invarianz-Eigenschaft: Für alle $A \subset \Omega$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbb{P}(T_n A) = \mathbb{P}(A)$; dabei ist für $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) \in \Omega$

$$T_n(\omega) = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, 1 - \omega_n, \omega_{n+1}, \ldots)$$

die Abbildung, die den n-ten Wurf umdreht und $T_n A = \{T_n(\omega) : \omega \in A\}$.

Lösung. Definiere die Äquivalenzrelation $\sim$ auf Ω wie folgt: Es ist $\omega \sim \omega'$ genau dann, wenn $\omega_n = \omega'_n$ für alle hinreichend großen n. Nach dem Auswahlaxiom existiert eine Menge $A \subseteq \Omega$, die von jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält.
Definiere weiterhin $\mathscr{S} = \{S \subset \mathbb{N} : |S| < \infty\}$ die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Dann ist $\mathscr{S} = \cup_m \{S \in \mathscr{S} : \max S = m\}$ als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen selbst abzählbar. Wir definieren nun noch für $S = \{n_, \ldots, n_k\}$ die Operation $T_S := T_{n_1} \circ \ldots \circ T_{n_k}$, also den Flip an allen Stellen von S. Nun gilt, dass

- $\Omega = \bigcup_{S\in\mathscr{S}} T_S A$: Zu jedem $\omega \in \Omega$ existiert ein Repräsentant $\omega' \sim \omega$, sodass ω und ω' sich nur auf einer endlichen Menge S unterscheiden, also $\omega = T_S \omega' \in T_S A$.

- Die Mengen $(T_S A)_{S\in\mathscr{S}}$ sind paarweise disjunkt: Angenommen $T_S A \cap T_{S'} A \neq \emptyset$, so gibt es ω, ω' mit $T_S \omega = T_{S'} \omega' - \omega$ und ω' unterscheiden sich also höchstens auf der endlichen Menge $S \cup S'$, und damit $\omega \sim \omega'$ und sogar $\omega = \omega'$. Doch dies impliziert $S = S'$.

Nehme nun an, es existiere eine Abbildung $\mathbb{P}$ mit den Eigenschaften des Satzes. Dann haben wir $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{S\in\mathscr{S}} \mathbb{P}(T_s A) = \sum_{S\in\mathscr{S}} \mathbb{P}(A)$. Letzteres ist unmöglich, da unendliches Aufsummieren einer nichtnegativen Zahl 0 oder ∞ ergibt.

Aufgabe Z1.4

Beweisen Sie: Sei $\mathcal{A} \neq \emptyset$ ein Mengensystem auf Ω. Dann existiert ein kleinstes Dynkin-System $\delta(\mathcal{A})$, welches $\mathcal{A}$ enthält, und außerdem $\delta(\mathcal{A}) = \bigcap D$, wobei der Schnitt über alle Dynkin-Systeme D über Ω läuft, welche $\mathcal{A}$ enthalten.

Lösung. Wir zeigen zuerst, dass für eine beliebige Indexmenge $I \neq \emptyset$ und $(\mathcal{D}_i)_{i\in I}$ eine Familie an Dynkin-Systemen auch $\cap_{i\in I} \mathcal{D}_i$ wieder ein Dynkin-System bildet:
(D1) $\forall i \in I : \Omega \in \mathcal{D}_i \quad \Rightarrow \Omega \in \cap_i \mathcal{D}_i$.
(D2) $\forall i \in I : \forall A, B \in \mathcal{D}_i \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{D}_i \quad \Rightarrow A \setminus B \in \cap_i \mathcal{D}_i$.
(D3) $\forall i \in I : \forall A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ mit $A_j \in \mathcal{D}_i \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow A := \cup_j A_j \in \mathcal{D}_i \quad \Rightarrow A \in \cap_i \mathcal{D}_i$.
Nun gilt erneut, dass 2^Ω ein Dynkin-System ist, der Schnitt, welcher $\delta(A)$ definiert, also nichtleer ist. Mit obiger Beobachtung ist dieser Schnitt wieder ein DS.

Übungsaufgaben

Aufgabe Ü1.5

Beweisen Sie Bemerkung 1.3 aus der Vorlesung, d.h.: Sei $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ ein Mengensystem mit $\emptyset \neq \Omega \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ genau dann eine σ-Algebra ist, wenn

(ii) $A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$ und

$(iii)'$ $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

oder

$(ii)'$ $A, B \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$ und

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

erfüllt ist.

Lösung. Wir betrachten den ersten Fall und führen die Notation $A^c := \bar{A} = \Omega \setminus A$ ein. Sei $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$. Mit

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A^c\right)^c, \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^c\right)^c$$

sehen wir, dass $(iii) \Leftrightarrow (iii)'$. Für den zweiten Fall zeigen wir zuerst, dass $(ii) \Rightarrow (ii)'$. Sei dafür $A \in \mathcal{A}$. Da auch $\Omega \in \mathcal{A}$ folgt mit $(ii)'$, dass $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$. Seien nun also $A, B \in \mathcal{A}$ und gelte (ii). Mit $A \setminus B = (B \cup A^c)^c$ folgt daraus (ii').

Aufgabe Ü1.6

(a) Finden Sie ein Beispiel für ein Mengensystem, das eine Algebra, aber keine σ-Algebra bildet.

(b) Zeigen Sie, dass jede σ-Algebra ein Dynkin-System ist, dass die Umkehrung jedoch im Allgemeinen nicht gilt.

Lösung.

(a) Das Mengensystem aus Z1.2 ist ein solches Beispiel. Für $\Omega = \mathbb{R}$ ist ein weiteres Beispiel

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq \Omega : |A| < \infty \text{ oder } |A^c| < \infty\},$$

also das System aller Mengen in $\mathbb{R}$, die endlich sind oder ein endliches Komplement besitzen. Dies ist offensichtlich eine Algebra, jedoch gilt z.B. mit der Folge $A_n = \{n\}$, dass weder $A = \cup_n A_n$ noch A^c endlich ist.

Wir zeigen nun noch, dass Beispiel 1.5(2) aus der Vorlesung, also $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \{\bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i) \cap \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in [-\infty, \infty]\}$, ebenfalls die Anforderungen erfüllt. Im Beweis, dass $\mathcal{A}$ eine Algebra ist, sind (i) und (iii) offensichtlich. Punkt (ii) ergibt sich, da $([a_1, b_1) \cap \mathbb{R})^c$ von der Form $(-\infty, a_1) \cup [b_1, \infty)$ und damit eine Vereinigung zweier Elemente aus $\mathcal{A}$ ist. Also ist $\mathcal{A}$ eine Algebra.

Setzen wir jedoch $a_i = 0, b_i = 1/n$, so ist $\cap_{i\in\mathbb{N}}[a_i, b_i) = \{0\} \notin \mathcal{A}$.

(b) Es gelten (D1) und (D3) unmittelbar, weiter gilt (D2) mit $A \setminus B = (A^c \cup B)^c$. Es ist also jede σ-Algebra ein DS. Sei nun $\Omega = \{1, \ldots, 2n\}$ für ein $2 \leq n \in \mathbb{N}$ und definiere

$$\mathcal{D} = \{D \in 2^\Omega : |D| = 2k, k \in \mathbb{N}\}$$

das System der Teilmengen gerader Mächtigkeit. Dann ist $\mathcal{D}$ offensichtlich ein DS. Betrachten wir allerdings $D_1 = \{1, 2\} \in \mathcal{D}$ und $D_2 = \{2, 3\} \in \mathcal{D}$, so ist $D_1 \cap D_2 = \{2\} \notin \mathcal{D}$.

Aufgabe Ü1.7

(a) Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ zwei σ-Algebren auf Ω. Zeigen oder widerlegen Sie: $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ bildet eine σ-Algebra.

(b) Seien $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ zwei Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, sodass $\mathbb{P}_1(A_n) = \mathbb{P}_2(A_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen oder widerlegen Sie: $\mathbb{P}_1(\cup_n A_n) = \mathbb{P}_2(\cup_n A_n)$.

Lösung.

(a) Sei $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_i = \{\emptyset, \{i\}, \{\mathbb{N} \setminus \{i\}\}, \mathbb{N}\}$ für $i \in \{1, 2\}$. Man prüft leicht, dass $\mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra ist. Jedoch enthält $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ die Mengen $\{1\}$ und $\{2\}$, jedoch nicht die Menge $\{1, 2\}$, ist also keine σ-Algebra.

(b) Es sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}, \mathcal{A} = 2^\Omega$ sowie $\mathbb{P}_1 = \mathcal{U}_\Omega$, also $\mathbb{P}_1(A) = |A|/4$, und $\mathbb{P}_2(A) = (|A \cap \{1, 2\}|/2$. Sei weiter $A_1 = \{2, 3\}$ und $A_2 = \{2, 4\}$. Nun ist $\mathbb{P}_i(A_j) = \frac{1}{2}$ für alle $1 \leq i, j \leq 2$, jedoch gilt für $A = \{2, 3, 4\} = A_1 \cup A_2$, dass

$$\mathbb{P}_1(A) = \frac{3}{4} \neq \frac{1}{2} = \mathbb{P}_2(A).$$

Aufgabe Ü1.8

Erinnern Sie sich an Satz 1.10: Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ von folgenden Mengensystemen erzeugt wird:

- $\mathcal{E}_2 = \{A \subseteq \mathbb{R}^d : A \text{ abgeschlossen}\}$,
- $\mathcal{E}_4 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}^d\}$,
- $\mathcal{E}_5 = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{Q}^d\}$,
- $\mathcal{E}_8 = \{B_r(x) : x \in \mathbb{Q}^d, r \in \mathbb{Q}^+\}$.

Lösung. Wir teilen die Aufgabe in vier Teilaufgaben.

(i) $\underline{\mathcal{E}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)}$: Sei $a, b \in \mathbb{Q}^d$. Wir nutzen Teilaufgabe (ii) und zeigen, dass $(a, b) \in \sigma(\mathcal{E}_2)$ gilt. Definiere $x \pm \alpha = (x_1 \pm \alpha, \ldots, x_d \pm \alpha)$ für $x \in \mathbb{Q}^d, \alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $(a, b) = \cup_n [a + 1/n, b - 1/n]$ die Vereinigung abzählbar vieler Elemente aus $\mathcal{E}_2$, was zu zeigen war.

$\underline{\mathcal{E}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)}$: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen. Wir definieren

$$A_n := U + \bigcup_{x \in U} B_{1/n}(x) = \{y : \exists x \in U : |y - x| < 1/n\}.$$

Dann ist A_n eine Folge offener Mengen mit $\cap_n A_n = U$. Die Inklusion $\supseteq$ ist klar. Für die andere Inklusion sei y ein Element aus dem Schnitt. Falls $y \notin U$, so existiert $\varepsilon = \inf_{x \in U} |x - y|$, da A abgeschlossen. Damit jedoch $y \notin A_n$ mit $n > 1/\varepsilon$.

(ii) $\underline{\mathcal{E}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_4)}$: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Wir behaupten, dass

$$U = \bigcup_{\substack{a, b \in \mathbb{Q}^d \\ (a, b) \subseteq U}} (a, b).$$

Die Inklusion $\supseteq$ ist klar. Sei also $x \in U$. Dann existiert $\varepsilon > 0$, sodass $B = B_\varepsilon(x) \subseteq U$ und damit $a, b \in \mathbb{Q}^d \cap B$ mit $x \in (a, b) \subseteq B$. Folglich lässt sich U als abzählbare Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{E}_4$ dargestellen. $\underline{\mathcal{E}_4 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)}$: Klar.

(iii) $\underline{\mathcal{E}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_5)}$: Mit der Notation aus (i) gilt $(a, b) = \cup_n (a, b - 1/n]$, die Behauptung folgt mit (ii).

$\underline{\mathcal{E}_5 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)}$: Die Umkehrung ergibt sich analog.

(iv) $\underline{\mathcal{E}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_8)}$: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Dann ist

$$U = \bigcup_{\substack{x \in \mathbb{Q}^d, r \in Q^+ \\ B_r(x) \subseteq U}} B_r(x).$$

Der Beweis dieser Identität ist analog zu (ii) und $\sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_8)$ folgt erneut, da es sich um eine abzählbare Vereinigung handelt. $\underline{\mathcal{E}_8 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)}$: Klar.

Aufgabe Ü1.9

Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ reelle Zufallsvariablen, $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $X + Y$ und αX ebenfalls Zufallsvariablen sind.

Lösung. Im Zuge von Ü1.8 ist es nicht schwer einzusehen, dass auch das System $\{(-\infty, a), a \in \mathbb{Q}\}$ ein Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist: In der Tat gilt $(a, b) = (-\infty, b) \cap \bigcup_n [a + 1/n, \infty)$ für $a, b \in \mathbb{Q}$ und damit wird $\sigma(\mathcal{E}_4)$ und folglich $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ erzeugt (ein analoger Beweis zeigt, dass $\mathcal{E}_7$ ebenfalls $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ erzeugt).
Nach Satz 1.14 genügt es also zu zeigen, dass die Ereignisse $\{X + Y < a\}$ für $a \in \mathbb{Q}$ messbar sind. Nun gilt jedoch

$$\begin{aligned} \{X + Y < a\} &= \bigcup_{r \in \mathbb{R}} (\{X < r\} \cap \{r < a - Y\}) \\ &= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{X < q\} \cap \{q < a - Y\}), \end{aligned}$$

was als abzählbare Vereinigung des Schnittes zweier messbarer Ereignisse messbar ist. Die zweite Identität folgt mit der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$: Wenn $X < r < a - Y$, so existiert auch eine rationale Zahl q mit $X < q < a - Y$.
Sei nun $\alpha \in \mathbb{R}$. Für $\alpha = 0$ ist $\{0 \cdot X < a\} \in \{\emptyset, \Omega\}$. Sei also $\alpha > 0$. Für $a \in \mathbb{Q}$ ist dann

$$\{\alpha X < a\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} : q \leq a/\alpha} \{X < q\}$$

eine abzählbare Vereinigung messbarer Ereignisse. Für $\alpha < 0$ überpüft man die Messbarkeit der Ereignisse $\{X > a/\alpha\}$ mit dem Resultat über $\mathcal{E}_7$.