Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 1

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Zentralübungsaufgaben

Aufgabe Z1.1

Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge und

$$\mathcal{E} := \{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}$$

die Menge der einelementigen Teilmengen von Ω. Identifizieren Sie $\sigma(\mathcal{E})$ sowie alle $\sigma(\mathcal{E})$-messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Aufgabe Z1.2

Sei $\mathcal{A}$ das System aller Teilmengen $A \subseteq \mathbb{N}$, für welche

$$\mu(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{n}$$

existiert. Zeigen Sie, dass μ eine additive Mengenfunktion ist, die *nicht* σ-additiv ist.

Aufgabe Z1.3

Beweisen Sie: Sei $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (was wir zum Beispiel als unendlichen Münzwurf interpretieren). Dann gibt es *keine* Abbildung $\mathbb{P} : 2^{\Omega} \to [0, 1]$ mit den Eigenschaften

(N) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(A) $\mathbb{P}$ ist σ-additiv, d.h. für $A_1, A_2, \ldots \in \Omega$ paarweise disjunkt gilt

$$\mathbb{P}(\cup_n A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n),$$

(I) $\mathbb{P}$ besitzt folgende Invarianz-Eigenschaft: Für alle $A \subset \Omega$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbb{P}(T_n A) = \mathbb{P}(A)$; dabei ist für $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) \in \Omega$

$$T_n(\omega) = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, 1 - \omega_n, \omega_{n+1}, \ldots)$$

die Abbildung, die den n-ten Wurf umdreht und $T_n A = \{T_n(\omega) : \omega \in A\}$.

Aufgabe Z1.4

Beweisen Sie: Sei $\mathcal{A} \neq \emptyset$ ein Mengensystem auf Ω. Dann existiert ein kleinstes Dynkin-System $\delta(\mathcal{A})$, welches $\mathcal{A}$ enthält, und außerdem $\delta(\mathcal{A}) = \bigcap D$, wobei der Schnitt über alle Dynkin-Systeme D über Ω läuft, welche $\mathcal{A}$ enthalten.

Übungsaufgaben

Aufgabe Ü1.5

Beweisen Sie Bemerkung 1.3 aus der Vorlesung, d.h.: Sei $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ ein Mengensystem mit $\emptyset \neq \Omega \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ genau dann eine σ-Algebra ist, wenn

(ii) $A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$ und
$(iii)'$ $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$
oder
$(ii)'$ $A, B \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$ und
(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$
erfüllt ist.

Aufgabe Ü1.6

(a) Finden Sie ein Beispiel für ein Mengensystem, das eine Algebra, aber keine σ-Algebra bildet.

(b) Zeigen Sie, dass jede σ-Algebra ein Dynkin-System ist, dass die Umkehrung jedoch im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe Ü1.7

(a) Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ zwei σ-Algebren auf Ω. Zeigen oder widerlegen Sie: $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ bildet eine σ-Algebra.

(b) Seien $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ zwei Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, sodass $\mathbb{P}_1(A_n) = \mathbb{P}_2(A_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen oder widerlegen Sie: $\mathbb{P}_1(\cup_n A_n) = \mathbb{P}_2(\cup_n A_n)$.

Aufgabe Ü1.8

Erinnern Sie sich an Satz 1.10: Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ von folgenden Mengensystemen erzeugt wird:

- $\mathcal{E}_2 = \{A \subseteq \mathbb{R}^d : A \text{ abgeschlossen}\}$,
- $\mathcal{E}_4 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}^d\}$,
- $\mathcal{E}_5 = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{Q}^d\}$,
- $\mathcal{E}_8 = \{B_r(x) : x \in \mathbb{Q}^d, r \in \mathbb{Q}^+\}$.

Aufgabe Ü1.9

Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ reelle Zufallsvariablen, $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $X + Y$ und αX ebenfalls Zufallsvariablen sind.