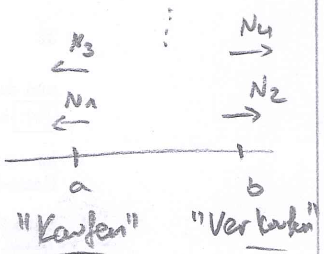
9.3. Martingalkonvergenz

Satz 9.12 Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Submartingal und $\sup_n \mathbb{E}[M_n^+] < \infty$. Dann existiert eine ZV $M_\infty \in \mathcal{L}^1$ mit $M_n \xrightarrow{f.s.} M_\infty$.

Für $a<b$ definiere

$$N_0 = -1$$
$$N_{2k-1} = \inf\{n : n > N_{2k-2},\ M_n \le a\}$$
$$N_{2k} = \inf\{n : n > N_{2k-1},\ M_n > b\}$$



und $U_n = \sup\{k \ge 0 : N_{2k} \le n\}$

U_n = Anzahl Durchkreuzungen von $[a,b)$ bis Zeit n
= wie oft wurde das Intervall von a nach b durchschritten bis Zeit n.

Lem. 9.13 $\mathbb{E}[U_n] \le (b-a)^{-1} \cdot \left(\mathbb{E}[(M_n-a)^+] - \mathbb{E}[(M_0-a)^+]\right)$.

Beweis Sei $f(x) = a + (x-a)^+ = \max\{a,x\}$. f konvex, wachsend, also $Y_n = f(M_n)$ ist Submartingal. $(Y_n)_n$ und $(M_n)_n$ haben dieselbe Zahl Durchkreuzungen von $[a,b)$.

Sei
$$H_i = \begin{cases} 1, & i \in (N_{2k-1}, N_{2k}] \text{ für ein } k \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt: für $N_{2k} < \infty$

$$Y_{N_{2k}} - Y_{N_{2k-1}} \ge b-a$$

$$\sum_{i=N_{2k-1}+1}^{N_{2k}} Y_i - Y_{i-1} = \sum_{i=N_{2k-1}+1}^{N_{2k}} H_i(Y_i - Y_{i-1})$$

und

$$\sum_{i=N_{2k}+1}^{N_{2k+1}} H_i(Y_i - Y_{i-1}) = 0.$$

Falls $U_n = k$, dann $\sum_{i=1}^{n} H_i(Y_i - Y_{i-1}) \ge k(b-a)$

$$\Rightarrow \quad (b-a)\,U_n \le (H\cdot Y)_n. \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[U_n] \le \frac{\mathbb{E}[(H\cdot Y)_n]}{b-a}.$$

Ferner:
$$(H\cdot Y)_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i - Y_{i-1} - \sum_{i=1}^{n} (1-H_i)(Y_i - Y_{i-1})$$
$$= Y_n - Y_0 - ((1-H)\cdot Y)_n$$

und
$$\{1-H_i = 0\} = \{H_i = 1\} = \bigcup_{k\ge 1} \{i \in (N_{2k-1}, N_{2k}]\}$$
$$= \bigcup_{k\ge 1} \{N_{2k-1} \le i-1\} \cap \{N_{2k} > i-1\} \in \mathcal{F}_{i-1}.$$

Mit Satz 9.7: $((1-H)\cdot Y)_n$ ist Submartingal.

$$\Rightarrow \mathbb{E}[((1-H)\cdot Y)_n] \ge \mathbb{E}[((1-H)\cdot Y)_0] = 0.$$

und insgesamt:

$$\mathbb{E}[U_n] \le \frac{\mathbb{E}[Y_n] - \mathbb{E}[Y_0]}{b-a} = \text{Beh.} \qquad \blacksquare$$

Beweis (Satz 9.12) Sei $a<b$, dann

$$\mathbb{E}[U_n] \le \frac{\mathbb{E}[(M_n-a)^+] - \mathbb{E}[(M_0-a)^+]}{b-a} \le \frac{\mathbb{E}[M_n^+] + |a|}{b-a}$$

Ferner $U_n \nearrow U$ für $U \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Mit mon. konv:

$$\mathbb{E}[U] \le \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[U_n] \le \frac{\sup \mathbb{E}[M_n^+] + |a|}{b-a} < \infty.$$

Damit ist $P(U=\infty)=0$ und

$$P(\liminf M_n \le a < b \le \limsup M_n) = 0$$

Damit ist auch

$$P\Big(\bigcup_{\substack{a,b\in\mathbb{Q}\\ a<b}} \{\liminf M_n \le a < b \le \limsup M_n\}\Big) = 0$$

also f.s. $\lim M_n$ existiert. Ferner

$$\mathbb{E}[M_\infty^+] = \mathbb{E}[\liminf M_n^+] \overset{(\text{Fatou})}{\le} \liminf \mathbb{E}[M_n^+] < \infty$$

und

$$\mathbb{E}[M_\infty^-] \le \liminf \mathbb{E}[M_n^-] = \liminf\big(\mathbb{E}[M_n^+] - \underbrace{\mathbb{E}[M_n]}_{=\mathbb{E}[M_0]}\big)$$

$$\le \sup_n \mathbb{E}[M_n^+] - \mathbb{E}[M_0] < \infty. \quad \blacksquare$$

Kor. 9.14 $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Supermartingal, $M_n \ge 0$. Dann konvergiert M_n und $\mathbb{E}[M_\infty] \le \mathbb{E}[M_0]$.

Beweis. $-M_n$ ist Submartingal mit $(-M_n)^+ = 0$. Damit $M_n \to M_\infty$ aus Satz 9.12. Mit Fatou:

$$\mathbb{E}[M_\infty] \le \liminf \mathbb{E}[M_n] \le \mathbb{E}[M_0]. \quad \blacksquare$$

Bsp. Polya-Urne. Urne hat r rote, b blaue Kugeln. Eine Kugel wird gleichverteilt entnommen, zwei Kugeln der gleichen Farbe zurückgelegt.

Sei $r+R_n$ die Anzahl roter Kugeln nach n Zügen. Betrachte:

$$M_n = \frac{r+R_n}{r+b+n}. \qquad R_{n+1} = R_n + D_{n+1}.$$

Beh M_n Martingal.

Bew. (M1)✓ (M2)✓, da $R_n \le n$. (M3):

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[M_{n+1} \mid R_1 \dots R_n]$$
$$= \mathbb{E}\Big[\frac{r+R_{n+1}}{r+b+n+1} \,\Big|\, R_1 \dots R_n\Big]$$

$$\mathbb{E}[R_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = R_n + \mathbb{E}[D_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = R_n + \frac{r+R_n}{r+b+n}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n. \quad \blacksquare$$

Damit $M_n \to M_\infty$ f.s.

9.4. Ungleichungen

Satz 9.15. $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Submartingal, T beschränkte Stoppzeit. ($\exists N$: $P(T>N)=0$). Dann

$$\mathbb{E}[M_0] \le \mathbb{E}[M_T] \le \mathbb{E}[M_N].$$

Bew. Satz 9.11 gibt erste Ungleichung.

Sei $H_i = \mathbb{1}[T \le i-1]$, $i \ge 1$. H_i ist $\mathcal{F}_{i-1}$-messbar und $(H\cdot M)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist Submartingal (Satz 9.7). Aber

$$(H\cdot M)_n = \sum_{i=1}^n H_i\cdot(M_i - M_{i-1}) = M_n\cdot\mathbb{1}[T\le n-1] - \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{1}[T=i]\cdot M_i$$
$$= M_n - M_{\min\{T,n\}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[M_n - M_{\min\{T,n\}}] \ge \mathbb{E}[(H\cdot M)_0] = 0, \quad n \ge 0$$
$$\Rightarrow \mathbb{E}[M_N] - \mathbb{E}[M_T] \ge 0 \quad \blacksquare$$

27/7/17

Satz 9.16 (Doob'sche Ungleichung) Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Submartingal. Dann für $\lambda>0$, $n\geq 1$:

$$P\left(\max_{k\leq n} M_k^+ \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\left[M_n \cdot \mathbb{1}\left[\max_{k\leq n} M_k^+ \geq \lambda\right]\right] \leq \frac{\mathbb{E}[M_n^+]}{\lambda}.$$

Beweis. Seien

$$A = \left\{\max_{k\leq n} M_k^+ \geq \lambda\right\} \qquad N = \inf\{0\leq i\leq n : M_i^+ \geq \lambda\}.$$

Dann:

$$P(A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A] \leq \frac{1}{\lambda}\cdot \mathbb{E}[M_{\min\{N,n\}}\cdot \mathbb{1}_A]$$

$$= \frac{1}{\lambda}\cdot\Big(\mathbb{E}[M_{\min\{N,n\}}] - \mathbb{E}[\underbrace{M_{\min\{n,N\}}}_{=M_n}\cdot \mathbb{1}_{\bar{A}}]\Big)$$

(Satz 9.15) $$\leq \frac{1}{\lambda}\Big(\mathbb{E}[M_n] - \mathbb{E}[M_n\cdot \mathbb{1}_{\bar{A}}]\Big)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\cdot\mathbb{E}[M_n\cdot \mathbb{1}_A].$$

2. Ungleichung aus: $M_n\cdot \mathbb{1}_A \leq M_n^+$. ∎

Bsp. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig, $\mathbb{E}[X_i]=0$, $Var[X_i]=\sigma_i^2>0$.

Dann:

S_n Martingal $\Rightarrow$ S_n^2 Submartingal

$$\Rightarrow P\left(\max_{k\leq n}|S_k|\geq\lambda\right) = P\left(\max_{k\leq n} S_k^2 \leq \lambda^2\right) \overset{(9.16)}{\leq} \frac{Var[S_n]}{\lambda^2}$$

Im Vergleich: Chebychev: $P(|S_n|\geq\lambda) \leq \frac{Var[S_n]}{\lambda^2}$.

Satz 9.17 $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Submartingal. Dann für $p>1$:

$$\mathbb{E}\left[\left(\max_{k\leq n} M_k^+\right)^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[(M_n^+)^p\right].$$

Beweis. Sei $\bar{M}_n = \max_{k\leq n} M_k^+$, $C>0$. Dann

$$\mathbb{E}[\min\{\bar{M}_n, C\}^p] = p\cdot\int_0^\infty \lambda^{p-1}\cdot P(\min\{\bar{M}_n,C\}>\lambda)\,d\lambda$$

und für $\lambda>0$

$$P(\bar{M}_n\geq\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[M_n\cdot\mathbb{1}[\bar{M}_n\geq\lambda]] \quad (\text{Satz } 9.16)$$

Damit:

$$P(\min\{\bar{M}_n,C\}\geq\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\cdot\mathbb{E}[M_n^+\cdot\mathbb{1}[\min\{\bar{M}_n,C\}\geq\lambda]]$$

Eingesetzt:

$$\mathbb{E}[\min\{\bar{M}_n,C\}^p] \leq p\cdot\int_0^\infty \lambda^{p-2}\,\mathbb{E}[M_n^+\,\mathbb{1}[\min\{\bar{M}_n,C\}\geq\lambda]]\,d\lambda$$

$$\overset{[\text{Fubini}]}{=} \mathbb{E}\left[M_n^+\int_0^\infty p\lambda^{p-2}\,\mathbb{1}[\min\{\bar{M}_n,C\}\geq\lambda]\,d\lambda\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[M_n^+\int_0^{\min\{\bar{M}_n,C\}} p\lambda^{p-2}\,d\lambda\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[M_n^+\,\frac{p}{p-1}\cdot\min\{\bar{M}_n,C\}^{p-1}\right]$$

Mit Hölder: $$\leq \frac{p}{p-1}\cdot\mathbb{E}[(M_n^+)^p]^{1/p}\cdot\mathbb{E}[\min\{\bar{M}_n,C\}^p]^{\frac{p-1}{p}}.$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\min\{\bar{M}_n,C\}^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[M_n^{+p}]$$

Aussage dann mit Monotoner Konvergenz. ∎

<u>Satz 9.18</u>. M_n Martingal, $\sup \mathbb{E}[|M_n|^p] < \infty$ für $p > 1$. Dann konvergiert M_n f.s. und in L^p.

<u>Beweis</u>: $\mathbb{E}[|X_n|] \leq \mathbb{E}[|X_n|^p]^{1/p}$

$\Rightarrow \sup \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$

$\Rightarrow$ fast sichere Konvergenz, $(M_n \xrightarrow{f.s.} M_\infty)$

Ferner:

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{k \leq n} |M_k|^p\Big] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|M_n|^p]$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\Big[\sup_{k \geq 1} |M_k|^p\Big] < \infty.$$

Da $|M_n - M_\infty|^p \leq \left(2 \sup_{k \geq 1} |M_k|\right)^p$

folgt die Aussage mit dom. Konvergenz.

$\square$