17/7/17

9. Martingale

Def 9.1 1) Eine Folge $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{F}$ von σ-Algebren heißt Filtration.

2) Eine Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von ZV heißt adaptiert an $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, falls für alle n M_n $\mathcal{F}_n$-messbar ist.

Def 9.2 (Martingal) Sei $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Filtration, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ZV. $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, falls

(M1) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ adaptiert an $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

(M2) $\forall n$: $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$

(M3) $\forall n$: $\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = M_n$.

Submartingal: $\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] \geq M_n$ Supermartingal: $\leq$

Bsp. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unab. identisch verteilt, $X_1 \in \mathcal{L}^1$ und

$$M_0 = 0, \quad M_n = \sum_{1\leq i\leq n} X_i, \quad \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \; \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, .., X_n)$$

Falls $\mathbb{E}[X_1] = 0$, dann M_n Martingal:

(M1) Für $k\in\mathbb{N}$ ist X_k $\sigma(X_k)$-messbar, also auch $\sigma(X_1,..,X_n)$-messbar für $n \geq k$. $\Rightarrow$ M_n $\sigma(X_1,..,X_n)$-messbar. ✓

(M2) $\mathbb{E}[|M_n|] \leq n \cdot \mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ ✓

(M3) $\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1} + M_n | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_n]$

M_n $\mathcal{F}_n$-messbar $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_n] = M_n$

X_{n+1} unab. von $X_1 .. X_n$ $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}] = 0$. ✓

Lem 9.3. Ist $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, so auch bzgl. $(\sigma(M_0,..,M_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis: (M1) M_n ist $\sigma(M_n)$-messbar, also auch $\sigma(M_0,..,M_n)$-messbar.

(M2) $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$, da $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Martingal.

(M3) M_k ist $\mathcal{F}_k$-messbar und für $n \geq k$ ist $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$.

$$\Rightarrow \sigma(M_0,..,M_n) = \sigma\big(\underbrace{\sigma(M_0)}_{\subseteq \mathcal{F}_0} \cup \ldots \cup \underbrace{\sigma(M_n)}_{\subseteq \mathcal{F}_n}\big) \subseteq \mathcal{F}_n.$$

Damit $\mathbb{E}[M_{n+1} | \sigma(M_0 .. M_n)]$

$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] | \sigma(M_0 .. M_n)]$ (Turmeigenschaft)

$= \mathbb{E}[M_n | \sigma(M_0 .. M_n)]$ (Martingal)

$= M_n$. ∎

Falls keine Filtration expl. gegeben, so ist immer $(\sigma(M_0 .. M_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ gemeint.

Lem 9.4. Sei M_n Martingal. Dann

$$\mathbb{E}[M_{n+1}] = \mathbb{E}[M_n] \qquad \left(\begin{array}{l}\text{Submartingal: } \geq \\ \text{Supermartingal: } \leq\end{array}\right)$$

Beweis. Aus (M3):

$$\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = M_n \Rightarrow \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}[M_n]$$ ∎

Lem 9.5. $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Martingal bzg $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ $\Rightarrow$

$$\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_k] = M_k \text{ f.s. für } 0 \leq k \leq n.$$

Beweis. $k = n$ klar, da M_n $\mathcal{F}_n$-messbar. Mit Induktion $k \to k-1$: Aus Turmeigenschaft

$$\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_{k-1}] = \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_k]}_{= M_k,\ IV.} | \mathcal{F}_{k-1}] = M_{k-1}.$$ ∎

Lem 9.6. Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ (Sb.-) Martingal bzgl $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Sei φ konvex. Falls $\mathbb{E}[|\varphi(M_n)|]<\infty$, dann $(\varphi(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Submartingal bzgl $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis. $(M1)\checkmark$ $(M2)\checkmark$ $(M3)$: Mit Jensen:

$$\mathbb{E}[\varphi(M_{n+1})\mid\mathcal{F}_n] \geq \varphi(\mathbb{E}[M_{n+1}\mid\mathcal{F}_n]) \overset{\geq}{=} \varphi(M_n) \quad \blacksquare$$

Bsp. $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Martingal $\Rightarrow (M_n^2), (|M_n|), (M_n^+)$ Submartingale.

Bsp. Ein Investor besitzt A_0 Aktien einer Firma, W_0 der Wert. Y_n = Aktienkurs nach n Tagen (zu Beginn n-ter Tag)

H_n = Anzahl Aktien im Besitz zwischen $(n-1)$-ten und n-ten Tag. "Strategie"

$$\Rightarrow W_n = W_{n-1} + H_n\cdot(Y_n - Y_{n-1}) = W_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i(Y_i - Y_{i-1})$$

"Wertprozess".

Annahmen: H_n ist $\sigma(Y_0,\dots,Y_{n-1})$ messbar. (d.h. die Strategie "kann nicht in die Zukunft schauen")

Falls Y_n ein Martingal (bzw. Sub-/Super-), dann:

$$\mathbb{E}[W_n] = \mathbb{E}[W_{n-1}] + \mathbb{E}[H_n(Y_n - Y_{n-1})]$$

$$= \mathbb{E}[W_{n-1}] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[H_n(Y_n-Y_{n-1})\mid\mathcal{F}_{n-1}]]$$

$$\overset{(H_n\ \mathcal{F}_{n-1}\text{-mes.})}{=} \mathbb{E}[W_{n-1}] + \mathbb{E}[H_n\,\mathbb{E}[Y_n - Y_{n-1}\mid\mathcal{F}_{n-1}]]$$

$$= \mathbb{E}[W_{n-1}] \qquad (\text{Analog } \geq, \leq).$$

Es gilt sogar etwas stärkeres:

Satz 9.7 Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ (Sub-/Super-) Martingal bzgl $(\mathcal{F}_n)$. Sei $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ präversibel, d.h. H_n $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar. Dann für $H_n \geq 0$ beschr

$$(H\cdot M)_n := \sum_{i=1}^{n} H_i(M_i - M_{i-1}), \quad n\in\mathbb{N}$$

(Sub-/Super-) Martingal bzgl $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Beweis. $(M1), (M2)\checkmark$. $M(3)$:

$$\mathbb{E}[(HM)_n\mid\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[(H\cdot M)_{n-1} + H_n(M_n - M_{n-1})\mid\mathcal{F}_{n-1}]$$

$$= (HM)_{n-1} + H_n\,\mathbb{E}[M_n - M_{n-1}\mid\mathcal{F}_n] = (HM)_{n-1}. \quad \blacksquare$$

20/7/17

Def 9.8. Ein ZV $T:\Omega\to\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ heißt Stoppzeit, falls $\forall n\in\mathbb{N}_0$: $\{T=n\}$ ist $\mathcal{F}_n$-messbar.

Bem. Man kann kann anhand von $M_0 \dots M_n$ entscheiden, ob gestoppt wird.

Bsp. Sei $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dann $T=\min\{n: M_n\in A\}$ ist eine Stoppzeit.

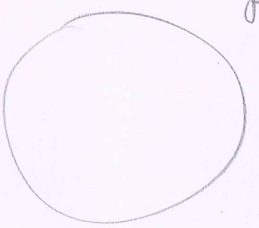
Satz 9.9 M_n Supermartingal, T Stoppzeit

$\Rightarrow M_{\min\{T,n\}}$ Supermartingal.

Beweis. Sei $H_n = \mathbb{1}[T\geq n]$. H_n ist $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar, da $\{T\geq n\} = \{T\leq n-1\}^c \in \mathcal{F}_{n-1}$.

$$\Rightarrow (H\cdot M)_n = \sum_{i=1}^{n} H_i(M_i - M_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}[T\geq i]\cdot M_i$$

$$- \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}[T\geq i]\cdot M_{i-1}}_{=\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{1}[T\geq i+1]M_i}$$

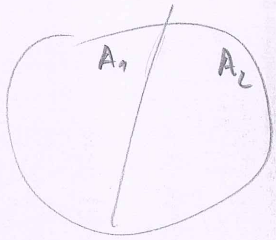


$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

M_0

Für ZV X ist

$M_0 = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[X]$.

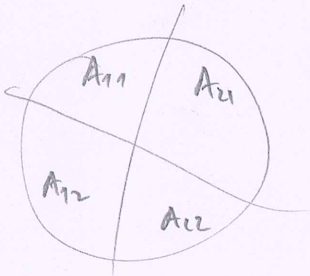


$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, A_1, A_2, \Omega\}$

M_1

$M_1 = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_1]$ "Verfeinerung von X"

$\Rightarrow \mathbb{E}[M_1 \mid \mathcal{F}_0] \underset{\text{(Turm)}}{=} \mathbb{E}[X] = M_0$ ✓



$\mathcal{F}_2 = \sigma(A_{ij})$

M_2

$M_2 = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_2]$ "Weitere Verfeinerung"

$\mathbb{E}[M_2 \mid \mathcal{F}_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_2] \mid \mathcal{F}_1] = M_1$ ✓

$\vdots$

20/7/17

9.2. Stoppzeiten

Def 9.8. Sei $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration. Eine ZV $T:\Omega\to\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ heißt Stoppzeit, falls $\{T\leq n\}\in\mathcal{F}_n$, $n\in\mathbb{N}_0$.

Bsp. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ unabh. ident mit $\mathbb{E}[X_1]=0$, $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$, $n\in\mathbb{N}_0$. S_n ist Martingal, $\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,\dots,X_n)$. Dann:

1) $T=\inf\{n: S_n=9\}$ ist Stoppzeit. Allgemein, für $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist $T=\inf\{n: S_n\in B\}$ Stoppzeit.

2) $T=\inf\{n\geq 100: S_n=\max\{S_k: 0\leq k\leq 99\}\}$ ist Stoppzeit.

3) $T=\inf\{n<100: S_n=\max\{S_k: 0\leq k\leq 99\}\}$ ist keine Stoppzeit.

Lem 9.9. Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, T Stoppzeit. Dann ist $Y_n=M_{\min\{n,T\}}$ Martingal.

Beweis. Sei $n\in\mathbb{N}_0$. Da $\{T\leq n\}$ in $\mathcal{F}_n$:

$$\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]=\mathbb{1}[T\leq n]\cdot\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]+\mathbb{1}[T>n]\cdot\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]$$
$$=\mathbb{E}[\mathbb{1}[T\leq n]\cdot Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]+\mathbb{E}[\mathbb{1}[T>n]\cdot Y_{n+1}|\mathcal{F}_n].$$

Falls $T\leq n$, dann $Y_{n+1}=M_T=Y_n$. Falls $T>n$, dann $Y_n=M_n$ und $Y_{n+1}=M_{n+1}$. Somit:

$$\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]=\mathbb{1}[T\leq n]\cdot Y_n+\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]\cdot\mathbb{1}[T>n]$$
$$=Y_n.$$

Satz 9.10 (Optional Stopping) Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, T Stoppzeit. Dann $\mathbb{E}[M_T]=\mathbb{E}[M_0]$ falls entweder

1) T beschränkt ($\exists N: P(T<N)=1$) oder
2) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt ($\exists N: P(\sup|M_n|<N)=1$ und T endlich ($P(T=\infty)=0$) oder
3) $\mathbb{E}[|M_{n+1}-M_n||\mathcal{F}_n]$ beschränkt und $\mathbb{E}[T]<\infty$.

Beweis. 1) Da T beschränkt: $M_T=M_{\min\{T,N\}}=Y_N$.
Da $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Martingal:

$$\mathbb{E}[M_T]=\mathbb{E}[Y_N]=\mathbb{E}[Y_0]\overset{T\geq 0}{=}\mathbb{E}[M_0]$$ ✓

2) Für $N'\in\mathbb{N}$ sei $T'=\min\{T,N'\}$. T' ist dann beschränkte Stoppzeit und mit 1):

$$\mathbb{E}[M_{T'}]=\mathbb{E}[M_0].$$

Da $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt $|M_T-M_{T'}|<2N$ und aus Def $P(M_{T'}\neq M_T)=P(T>N')$. Somit

$$|\mathbb{E}[M_T]-\mathbb{E}[M_0]|\leq 2N\cdot P(T>N')\xrightarrow{N'\to\infty}0.$$ ✓

3) Sei wieder $T'=\min\{T,N'\}$. Dann $\mathbb{E}[M_{T'}]=\mathbb{E}[M_0]$ und

$$\mathbb{E}[|M_T-M_{T'}|]\leq\mathbb{E}\left[\sum_{k=N'}^{T-1}|M_{k+1}-M_k|\right]$$
$$=\sum_{k\geq N'}\mathbb{E}[|M_{k+1}-M_k|\cdot\mathbb{1}[T>k]]$$

$$= \sum_{k \geq N'} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[|M_{k+1} - M_k| \cdot \mathbb{1}[T>k] \mid \mathcal{F}_k \right]\right]$$

$$= \sum_{k \geq N'} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}[T>k] \cdot \mathbb{E}\left[|M_{k+1} - M_k| \mid \mathcal{F}_k \right]\right]$$

$$\leq N \cdot \sum_{k \geq N'} P(T>k)$$

Da $\mathbb{E}[T] < \infty$ konvergiert die Summe $\to 0$. ✓

Anwendungen. Einfacher Random Walk. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ unabh. identisch mit $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = 1/2$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Wir wissen: (i) $P(\limsup S_n = \infty, \liminf S_n = -\infty) = 1$. (Satz 3.15, im Beweis). (ii) S_n Martingal.

1) $a, b \in \mathbb{N}$, $T = \inf\{n : S_n \in \{-a, b\}\}$. Was ist $P(S_T = a)$?

Mit (i): $P(T = \infty) = 0$.

Mit Lem 9.9. $S'_n = S_{\min\{n,T\}}$ ist Martingal, sogar beschränkt, und $S_T = S'_T$, $S_0 = S'_0$.

Mit Satz 9.10 2):

$$0 = \mathbb{E}[S_0] = \mathbb{E}[S'_0] = \mathbb{E}[S'_T] = \mathbb{E}[S_T]$$

$$= P(S_T = -a) \cdot (-a) + P(S_T = b) \cdot b$$

$$= P(S_T = -a) \cdot (-a - b) + b$$

$$\Rightarrow P(S_T = -a) = \frac{b}{b+a}.$$

2) $T = \inf\{n : S_n \in \{-a, a\}\}$.

Was ist $\mathbb{E}[T]$?

Betrachte $H_n = S_n^2 - n$. Dann H_n $\mathcal{F}_n$-messbar,

$$\mathbb{E}[|H_n|] \leq n + \mathbb{E}[S_n^2] \leq n \cdot (1 + \mathrm{Var}[X_1]) < \infty.$$

Ferner:

$$\mathbb{E}[H_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_{n+1}^2 - n - 1 \mid \mathcal{F}_n]$$

$$= -1 + \mathbb{E}[S_n^2 - n + 2X_{n+1} S_n + X_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n]$$

$$= -1 + \mathbb{E}[S_n^2 - n \mid \mathcal{F}_n] + 2\,\mathbb{E}[X_{n+1} S_n \mid \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n].$$

$\to S_n^2 - n$ $\mathcal{F}_n$-messbar $\Rightarrow \mathbb{E}[S_n^2 - n \mid \mathcal{F}_n] = H_n$.

$\to X_{n+1}, S_n$ unabhängig $\Rightarrow \mathbb{E}[X_{n+1} \cdot S_n \mid \mathcal{F}_n] = S_n \cdot \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = 0$.

$\to \mathbb{E}[X_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] = \frac{1}{2}(-1)^2 + \frac{1}{2} 1^2 = 1$.

$\Rightarrow \mathbb{E}[H_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = H_n$.

$\Rightarrow H_n$ Martingal, und

$$0 = \mathbb{E}[H_0] = \mathbb{E}[H_T] = \mathbb{E}[S_T^2 - T] = a^2 - \mathbb{E}[T]. \checkmark$$

Satz 9.11 Sei $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ Submartingal bzgl $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, T Stoppzeit. Dann $\mathbb{E}[M_T] \geq \mathbb{E}[M_0]$ falls entweder 1) 2) oder 3) (aus Satz 9.10).

Satz 9.12 (M_n) pos. Martingal $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} M_n$ existiert.