12/7/17

8. Bedingte Erwartungswerte & Verteilungen

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W-Raum, $B \in \mathcal{A}$ mit $P(B) > 0$. Für $A \in \mathcal{A}$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{"bedingte W-keit von A gegeben B"}$$

$\Rightarrow P_B(A) := P(A|B)$ ist W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

$\Rightarrow \mathbb{E}_B[X] = \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_B] / P(B)$ ist zug. Erwartungswert.

Was ist wenn $P(B) = 0$?

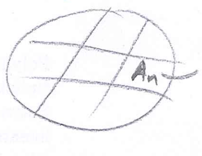
Seien X, Y unabh., f messbar. Dann für y mit $P(Y=y) > 0$

$$\mathbb{E}[f(X,Y) \mid Y=y] = \frac{\mathbb{E}[f(X,Y) \cdot \mathbb{1}[Y=y]]}{P[Y=y]}$$

$$= \frac{\mathbb{E}[f(X,y) \cdot \mathbb{1}[Y=y]]}{P[Y=y]} = \mathbb{E}[f(X,y)]$$

Warum auch nicht wenn $P(Y=y) = 0$?

Def 8.1 Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ disjunkt mit $\bigcup_{n \geq 1} A_n = \Omega$ und $P(A_n) > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sei $X \in \mathcal{L}^1$. Dann heißt



$\mathbb{E}[X|A_n]$

$$\tilde{X}(\omega) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[X|A_n] \cdot \mathbb{1}_{A_n}(\omega)$$

der bedingte Erwartungswert von X bezgl. $\mathcal{F} = \sigma(\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}})$.

Wir schreiben $\tilde{X} = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$.

Bem. 1) $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ ist nicht immer eine Zahl. Es gilt:

$\omega, \omega' \in A_n \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{F}](\omega) = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}](\omega')$.

2) Falls $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$, dann $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = \mathbb{E}[X]$

0) $\tilde{X} \in \mathcal{L}^1$.

3) Sei $A \in \mathcal{F}$. Dann gibt es $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_{n_i}$. (Zeige, dass Vereinigungen der A_n's eine σ-Algebra bilden.)

4) Sei X $\mathcal{F}$-messbar, also

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists (n_i)_{i \in \mathbb{N}} : X^{-1}(B) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_{n_i}$$

D.h. $X = \sum_{n \geq 1} c_n \cdot \mathbb{1}_{A_n}$ und somit

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = \sum_{n \geq 1} \frac{\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{A_n}]}{P(A_n)} \cdot \mathbb{1}_{A_n} = \sum c_n \mathbb{1}_{A_n} = X.$$

Lem 8.2. 1) $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ ist $\mathcal{F}$-messbar.

2) Für $A \in \mathcal{F}$: $\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \cdot \mathbb{1}_A]$.

Bew. 1) Klar, da $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ konstant auf den A_n's.

2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists (n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $A = \bigcup_{i \geq 1} A_{n_i}$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\tilde{X} \cdot \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\tilde{X} \cdot \sum_{i \geq 1} \mathbb{1}_{A_{n_i}}]$$

$$= \sum_{i \geq 1} \mathbb{E}[\tilde{X} \cdot \mathbb{1}_{A_{n_i}}] = \sum_{i \geq 1} \mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{n_i}]}{P(A_{n_i})} \cdot \mathbb{1}_{A_{n_i}}\right]$$

$$= \sum_{i \geq 1} \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{n_i}] = \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_A]. \quad \bullet$$

Lem 8.3. Def 8.1 ist äquivalent zu 1), 2) aus Lem 8.2.

Beweis. "$\Rightarrow$" ✓ "$\Leftarrow$" Wegen 1) ist $\tilde{X}$ $\mathcal{F}$-messbar, also $\tilde{X} = \sum_{n \geq 1} c_n \cdot \mathbb{1}_{A_n}$ für $c_n \in \mathbb{R}$. Wegen 2) folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{A_n}] = \mathbb{E}[\tilde{X} \cdot \mathbb{1}_{A_n}] = c_n \cdot P(A_n). \quad \bullet$$

Def 8.4 Sei $X \in \mathcal{L}^1$, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ σ-Algebra. Eine ZV $\tilde{X}$ mit

1) $\tilde{X}$ ist $\mathcal{F}$-messbar

2) $\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\tilde{X} \cdot \mathbb{1}_A] \ \forall A \in \mathcal{F}$

heißt bedingte Erwartung von X gegeben $\mathcal{F}$. ($\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$)

Satz 8.5 $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ existiert und ist f.s. eindeutig.

Beweis 1) $X \geq 0$. Sei $Q: \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ mit $Q(A) := \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_A]$. Ferner

Q ist ein endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Ferner

$$P(A) = 0 \Rightarrow Q(A) = 0 \quad \text{, also} \quad Q \ll P.$$

Mit Radon-Nikodym: es existiert $\mathcal{F}$-messbare Fkt $\tilde{X}$ mit

$$Q(A) = \int_A \tilde{X} \, dP = \mathbb{E}[\tilde{X} \cdot \mathbb{1}_A] \text{ , und } \tilde{X} \text{ f.s. eindeutig.}$$

2) Allg. X. Schreibe $X = X^+ - X^-$ mit $X^+, X^- \geq 0$.

Satz 8.6 Eigenschaften:

A) X $\mathcal{F}$-messbar $\Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = X$ f.s. ("X ist Version der bed. Erw.")

B) $\sigma(X)$, $\mathcal{F}$ unabh $\Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = \mathbb{E}[X]$ f.s.

Insbesondere: $\mathbb{E}[X|\{\emptyset, \Omega\}] = \mathbb{E}[X]$ f.s.

c) $\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{F}] = a \cdot \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] + b \cdot \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$. (Linearität)

D) $X \leq Y$ f.s $\Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \leq \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$ f.s. (Monotonie)

E) $X_n \geq 0$, $X_n \nearrow X$, $\mathbb{E}[X] < \infty \Rightarrow \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}] \nearrow \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$

(mon. Konvergenz)

F) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]] = \mathbb{E}[X]$

G) X $\mathcal{F}$-messbar, $\mathbb{E}[|Y|]$, $\mathbb{E}[|XY|] < \infty \Rightarrow \mathbb{E}[XY|\mathcal{F}] = X \cdot \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$.

H) $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ σ-Algebren, dann:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]|\mathcal{F}_2] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_2]|\mathcal{F}_1]$$

(Turmeigenschaft)

I) $X, Y \in \mathcal{L}^2$, Y $\mathcal{F}$-messbar $\Rightarrow \mathbb{E}[(X-Y)^2]$ für

$Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ minimal.

J) $|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]| \leq \mathbb{E}[|X||\mathcal{F}]$.

k) φ konvex $\Rightarrow \varphi(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)|\mathcal{F}]$.

Beweis B) $\mathbb{E}[X]$ konstant, also $\mathcal{F}$-messbar. Ferner: $A \in \mathcal{F}$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X] \cdot P(A) \\ \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_A] \underset{\text{(unabh.)}}{=} \mathbb{E}[X] \cdot P(A) \end{array}\right\} \Rightarrow 2) \ \checkmark$$

D) Für $A \in \mathcal{F}$ gilt:

$$\mathbb{E}[\tilde{X} \cdot \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_A] \leq \mathbb{E}[Y \cdot \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\tilde{Y} \cdot \mathbb{1}_A].$$

Sei $\varepsilon > 0$. Für $A_\varepsilon = \{\tilde{X} - \tilde{Y} \geq \varepsilon\}$ gilt:

$$0 \geq \mathbb{E}[(\tilde{X} - \tilde{Y}) \mathbb{1}_{A_\varepsilon}] \geq \varepsilon \cdot P(A_\varepsilon) \Rightarrow P(A_\varepsilon) = 0.$$

E) $(\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist $\nearrow$ f.s., also ist auch der Limes $\tilde{X}$ $\mathcal{F}$-messbar. Ferner

$$\mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} \tilde{X}_n \cdot \mathbb{1}_A] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\tilde{X}_n \cdot \mathbb{1}_A] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n \cdot \mathbb{1}_A] \quad (*)$$

$$= \mathbb{E}[(\lim X_n) \cdot \mathbb{1}_A]. \Rightarrow 2).$$

F) $\Omega \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{E}[\tilde{X}] = \mathbb{E}[\tilde{X} \cdot \mathbb{1}_\Omega] = \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_\Omega] = \mathbb{E}[X]$.

G) $X \cdot \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$ ist $\mathcal{F}$-messbar. $\Rightarrow$ 1). Noch zu zeigen: 13/7/17

für $A \in \mathcal{F}$: $\int_A XY \, dP = \int_A X \cdot \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}] \, dP$.

(i) $X = \mathbb{1}_B$. Dann

$$\int_A \mathbb{1}_B Y \, dP = \int_{A\cap B} Y \, dP = \int_{A\cap B} \tilde{Y} \, dP = \int_A \mathbb{1}_B \tilde{Y} \, dP \quad \checkmark$$

(ii) X einfache Funktion: aus i) mit Linearität.

(iii) $X, Y \geq 0$, $X_n \nearrow X$. Dann: (X_n einfache Fkt.)

$$\int_A X_n Y \, dP \overset{(ii)}{=} \int X_n \tilde{Y} \, dP$$

$\downarrow$ mon. Konv. $\qquad \downarrow$ mon. Konv, E)

$$\int_A XY \, dP \qquad \int X \tilde{Y} \, dP$$

(iv) Allg $X, Y \Rightarrow X = X^+ - X^-$, $Y = Y^+ - Y^-$.

H) $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]$ ist $\mathcal{F}_2$-messbar (da $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$). Nach A) ist somit

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]|\mathcal{F}_2] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1].$$

Für jedes $A \in \mathcal{F}_1$ gilt: (z.z. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_2]|\mathcal{F}_1] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]$)

$$\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1] \, dP = \int_A X \, dP = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_2] \, dP$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1] \cdot \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_2] \cdot \mathbb{1}_A]. \quad \blacksquare$$

Def 8.7. Für $X, Y \in \mathcal{L}^1$ definiere $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X|\sigma(Y)]$

Bem $\mathbb{E}[X|Y]$ ist unsere beste Beschreibung von X, wenn wir Y kennen. Extremfälle:

- X, Y unabhängig $\Rightarrow \mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$
- $X = f(Y) \Rightarrow \mathbb{E}[X|Y] = f(Y)$.

Frage: was ist $\mathbb{E}[X|Y=y]$?

Satz 8.8. X $\sigma(Y)$-messbar $\Rightarrow$ es gibt messbare Fkt $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $X = \varphi(Y)$.

Beweis. (i) $X = \mathbb{1}_A$, $A \in \sigma(Y)$. Dann ex $B \in \mathcal{B}$ mit $A = Y^{-1}(B)$.

Sei $\varphi = \mathbb{1}_B$, dann ist

$$X(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) = \mathbb{1}_B(Y(\omega)) = \varphi(Y(\omega)). \quad \checkmark$$

(ii) X einfach, also $X = \sum_{i \geq 1} c_i \mathbb{1}_{A_i}$. Setze $\varphi = \sum c_i \mathbb{1}_{B_i}$ mit $B_i := Y^{-1}(A_i)$.

(iii) $X \geq 0$, $X_n \nearrow X$, X_n einfach. Mit (ii): es gibt $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X_n = \varphi_n(Y)$, $n \geq 1$. Sei

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \text{ existiert}\}$$

und setze

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lim \varphi_n(x), & x \in S \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(Y(\omega)) = \varphi(Y(\omega)) \quad \blacksquare$$

Def 8.9 Sei φ so, dass $\mathbb{E}[X|Y] = \varphi(Y)$. Dann

$$\mathbb{E}[X|Y=y] = \varphi(y) \quad \text{(Bed. Erw. geg. } Y=y\text{)}$$

Bem. Es gilt in diesem Fall ! auch wenn $P(Y=y)=0$!

$$\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}[Y\in B]] = \mathbb{E}[\varphi(Y) \cdot \mathbb{1}[Y \in B]] = \int_B \varphi(y) \, dP_Y(y) = \int_B \mathbb{E}[X|Y=y] \, dP_Y(y) \quad \blacksquare$$

9.2. Bedingte Verteilung

<u>Def 8.10</u>. Für $B \in \mathcal{A}$ ist

$$P(B \mid Y=y) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B \mid Y=y]$$ "Bedingte W-keit von B gegeben Y=y"

und für $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$

$$P(B \mid \mathcal{F}) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B \mid \mathcal{F}]$$ " —"— geg. F"

<u>Beachte:</u> $P(B \mid \mathcal{F})$ ist selber ZV, also $P(B \mid \mathcal{F}) : \Omega \to [0,1]$
mit $\mathbb{E}[P(B \mid \mathcal{F})] = P(B)$.

<u>Bsp.</u> $\mathcal{F} = \sigma(\{\Omega_i\}_{i \geq 0})$, $\Omega_i = \{\omega : \text{Alter} = i\}$

X = Gehalt.

Sei $B = \{X \leq N\}$

Dann $P(B \mid \mathcal{F})(\omega) = \mathbb{E}[\mathbb{1}[X \leq N] \mid \mathcal{F}]$

= Anteil der i-jährigen, die $\leq N$ verdienen, wobei i = Alter von ω.

Analog: allg. B

Betrachte für $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, $\omega \in \Omega$ die Abbildung

$$P(\cdot \mid \mathcal{F})(\omega) : \mathcal{F} \to [0,1].$$ W-Maß?

Seien $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ disjunkt. Dann f.s.

$$P\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \,\Big|\, \mathcal{F}\Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(B_n \mid \mathcal{F}).$$

D.h. Bis auf Nullmenge $N(B_1, \dots)$ sind beide Seiten gleich. Wenn es überabzählbar viele disjunkte Mengen gibt, könnte die Menge der Nullmengen keine Nullmenge mehr sein...!

<u>Def 8.11</u> Eine Abbildung $P(\omega, B) : \Omega \times \mathcal{A} \to [0,1]$ heißt <u>reguläre Version</u> der bedingten W-keit gegeben $\mathcal{F}$, falls

a) $\forall \omega \in \Omega$: $P(\omega, \cdot)$ ist W-Maß $\left[\int_\Omega P(\omega, d\omega') = 1\right]$

b) $\forall B \in \mathcal{A}$: $P(\cdot, B)$ ist Version der $P(B \mid \mathcal{F})$.

Analog für Verteilungen von X geg $\mathcal{F}$:

a) $\forall \omega \in \Omega$: $P(\omega, \cdot)$ ist W-Maß

b) $\forall B \in \mathcal{B}$: $P(\cdot, B)$ ist Version von $P(X \in B \mid \mathcal{F})$.

<u>Satz.</u> Für $X \in \mathcal{L}^1$ existiert reguläre Version der bedingten Verteilung. (Beweis... Durett)

<u>Satz 8.12</u> Sei $P(\omega, B)$ reg. Version von $P(\cdot \mid \mathcal{F})$ und $X \in \mathcal{L}^1$. Dann

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}](\omega) = \int_\Omega X(\omega') \cdot P(\omega, d\omega') \quad P\text{-f.s.}$$