6. Charakteristische Funktionen

Für $X \geq 0$ ZV, $t > 0$, mit Chebyshev

$$P(X > x) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{tx}}$$

Falls die Verteilung nicht exponentiell abfällt, dann ist $\mathbb{E}[e^{tX}]$ "groß".

Def. 6.1. Sei X ZV.

$$\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}[\cos(tX)] + i \cdot \mathbb{E}[\sin(tX)]$$

heißt charakteristische Funktion von X.

Bem. Wenn X stetig ist mit Dichte f, dann

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\, dx \qquad \text{(Fouriertransformierte)}$$

Satz 6.2. φ_X hat folgende Eigenschaften:

a) $\varphi_X(0) = 1$

b) $\varphi_{-X}(t) = \varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$

c) $P_X = P_{-X} \Leftrightarrow \varphi_X \in \mathbb{R}$

d) $|\varphi_X(t)| \leq 1$, φ_X gleichmäßig stetig

e) $\varphi_{aX+b} = e^{ibt} \varphi_X(at)$, $a, b \in \mathbb{R}$

f) X, Y unabhängig $\Rightarrow \varphi_{X+Y} = \varphi_X \cdot \varphi_Y$

Beweis. Übung.

Bsp. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$.

Für $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ ist $X = \sigma Y + \mu$, also $\varphi_X(t) = e^{i\mu t} \cdot \varphi_Y(\sigma t)$.

$$\varphi_Y(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$$

Differenzieren (Leibniz Regel) liefert:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (-\sin(tx)) \cdot \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$$

Partielle Integration liefert:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_Y(t) = -\sin(tx) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} - t \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$$

$$= -t\, \varphi_Y(t).$$

Damit: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi_Y(t) \cdot e^{t^2/2}\right) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_Y(t) \cdot e^{t^2/2} + \varphi_Y(t) \cdot t \cdot e^{t^2/2} = 0$

$\Rightarrow \varphi_Y(t) \cdot e^{t^2/2} = \text{const}$.

Mit $\varphi_Y(0) = 1$ erhalten wir: $\varphi_Y(t) = e^{-t^2/2}$, $\varphi_X(t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

Satz 6.3. Sei X ZV mit $\mathbb{E}[|X|^k] < \infty$. Dann:

1) φ_X ist k-mal stetig diffbar und
$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \cdot \mathbb{E}[X^k e^{itX}]$ gleichmäßig stetig

2) $\mathbb{E}[X^m] = i^{-m} \cdot \varphi_X^{(m)}(0)$, $m \in \{0, \dots, k\}$

3) Für $t \to 0$ ist $\varphi_X(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\varphi_X^{(j)}(0)}{j!} t^j + o(|t|^k)$

Wir benötigen

$$\left| e^{ix} - \sum_{j=0}^{n} \frac{(ix)^j}{j!} \right| \leq \min\left\{ \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, 2\frac{|x|^n}{n!} \right\}, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0$$

Beweis. 1) Induktion über k.

k=1 Dann $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ und wir erhalten: (mit Jensen)

$$\left| \frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} - i\cdot \mathbb{E}[Xe^{itX}] \right| \le \mathbb{E}\left[\left| \frac{e^{i(t+h)X}-e^{itX}}{h} - iXe^{itX}\right|\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left| \frac{e^{ihX}-1}{h} - iX\right|\right] =: \mathbb{E}[\Psi_h(X)]$$

Weiter gilt:

$$\Psi_h(x) = \frac{1}{h}\left|e^{ihx}-1-ihx\right| \le \frac{|hx|^2}{2h} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

$$\Psi_h(x) \le \left|\frac{e^{ihx}-1}{h}\right| + |x| \le \frac{2h|x|}{h} + |x| \le 3|x|.$$

Mit dom. Konvergenz: $\mathbb{E}[\Psi_h(X)] \xrightarrow{h\to 0} 0$ gleichmäßig in t.

<u>$k \to k+1$</u>

$$\left| \frac{\varphi^{(k+1)}(t+h)-\varphi^{(k+1)}(t)}{h} - i^{k+1}\cdot \mathbb{E}[X^{k+1}e^{itX}] \right|$$

$$\le \mathbb{E}\left[\left| i^k X^k \frac{e^{i(t+h)X}-e^{itX}}{h} - i^{k+1}X^{k+1}e^{itX}\right|\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[|X|^k \cdot \left| \frac{e^{ihX}-1}{h} - iX\right|\right] \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

2) folgt direkt aus 1).

3)
$$\left|\varphi(t) - \sum_{j=0}^{k} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} t^j\right| \le \mathbb{E}\left[\left|e^{itX} - \sum_{j=0}^{k}\frac{(itX)^j}{j!}\right|\right]$$

$$\le \mathbb{E}\left[\min\left\{ \underbrace{\frac{|tX|^{k+1}}{(k+1)!}}_{\to 0,\, t\to 0}, \underbrace{2\frac{|tX|^k}{k!}}_{\le C\cdot \mathbb{E}[|X|^k]} \right\}\right]$$

Mit dom. Konvergenz $\to 0$ für $t \to 0$. ∎

Umkehrung gilt nicht immer, aber:

<u>Satz 6.4.</u> $|\varphi^{(2k)}(0)| < \infty \Rightarrow \mathbb{E}[|X|^{2k}] < \infty$, $k \in \mathbb{N}$.

<u>Beweis</u> Nur für $k=1$.

$$\varphi''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(2h) - 2\varphi(0) + \varphi(-2h)}{4h^2} \quad [\text{L'Hospital}]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{4h^2}\cdot \mathbb{E}[e^{2ihX} - 2 + e^{-2ihX}]$$

$$= \lim_{h\to 0} \mathbb{E}\left[\left(\frac{e^{ihX}-e^{-ihX}}{2h}\right)^2\right]$$

$$= -\lim_{h\to 0} \mathbb{E}\left[X^2 \cdot \left(\frac{\sin(hX)}{hX}\right)^2\right]$$

Mit Fatou: $\varphi''(0) \le -\mathbb{E}\left[X^2 \cdot \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin(hX)}{hX}\right)^2\right]$ $[\int \liminf \le \liminf \int]$

$$= -\mathbb{E}[X^2]. \quad ∎$$

<u>6.1. Inversionsformel</u>

<u>Lem 6.4.</u> Sei $Y \sim N(0,\sigma^2)$, X unabhängig von Y. Dann hat $X+Y$ die Dichte

$$f^{(\sigma)}(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \varphi_X(t)\, e^{-itx - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

<u>Beweis</u> Faltung von X, Y ergibt:

$$f^{(\sigma)}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_Y(x-y)\, dP_X(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}}\, dP_X(y)$$

Wir zeigten: (für $N(0, 1/\sigma^2)$)

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itu - \frac{u^2\sigma^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^{-2}}}\, du = e^{-t^2/2\sigma^2}$$

und mit $t = y - x$:

$$f^{(\sigma)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i(y-x)u - \frac{u^2\sigma^2}{2}} \, du \right) dP_X(y)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{iyu} \, dP_X(y) \right)}_{\mathbb{E}[e^{iXu}] = \varphi_X(u).} e^{-ixu - \frac{u^2\sigma^2}{2}} \, du$$

Bemerkung. $\left.\begin{array}{l} X \text{ ZV}, \quad Y \text{ stetige ZV.} \\ X, Y \text{ unabhängig.} \end{array}\right\} \Rightarrow X+Y$ stetig mit Dichte $\int_{\mathbb{R}} f_Y(x-y)\, dP_X(y)$, $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Für $t \in \mathbb{R}$ betrachte:

$$\int_{-\infty}^{t} \left(\int_{\mathbb{R}} f_Y(x-y)\, dP_X(y) \right) dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{t} f_Y(x-y)\, dx \right) dP_X(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} P_Y((-\infty, t-y])\, dP_X(y)$$

$$\overset{\text{Faltung}}{=} P(X+Y \leq t).$$

29/6/17

Lem 6.4. $Y \sim N(0,\sigma^2)$, X unabhängig von Y. Dichte von $X+Y$:

$$f^{(\sigma)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \varphi_X(t) e^{-itx - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}\,dt, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Satz 6.5 Sei X ZV. Für alle Stetigkeitsstellen a,b von F_X:

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{\sigma^2\to 0} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \varphi_X(t)\cdot e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \frac{e^{-itb}-e^{-ita}}{-it}\,dt$$

Beweis Sei $Y\sim N(0,\sigma^2)$. Für $\sigma^2\to 0$ mit Chebyshev: $Y \xrightarrow{P} 0$.

Damit $X+Y \xrightarrow{d} X$ für $\sigma^2\to 0$ und

$F_{X+Y}(b)\to F_X(b)$, $\quad F_{X+Y}(a)\to F_X(a)$.

Ferner gilt:

$$F_{X+Y}(b) - F_{X+Y}(a) = \int_a^b f^{(\sigma)}(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_a^b\int_{\mathbb{R}} \varphi_X(t) e^{-itx - \frac{\sigma^2t^2}{2}}\,dt\,dx$$

$$[\text{Fubini}] \quad = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \varphi_X(t)\cdot e^{-\sigma^2t^2/2}\underbrace{\left(\int_a^b e^{-itx}\,dx\right)}_{=\left[-\frac{e^{-itx}}{it}\right]_a^b}\,dt$$

Korollar 6.6. $\forall t\in\mathbb{R}: \varphi_X(t) = \varphi_Y(t) \iff P_X = P_Y$

Somit ist $\{e^{itx} : t\in\mathbb{R}\}$ trennende Familie.

(Eindeutigkeitssatz).

Kor. 6.7. Ist $\int_{\mathbb{R}} |\varphi_X(t)|\,dt < \infty$, so hat P_X Lebesgue Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-itx}\varphi_X(t)\,dt, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Beweis Für Stetigkeitsstellen a,b von F_X:

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{\sigma^2\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \varphi_X(t) e^{-\sigma^2t^2/2}\left(\int_a^b e^{-itx}\,dx\right)dt$$

$$[\text{Dom. Konv.}] \quad = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \varphi_X(t)\left(\int_a^b e^{-itx}\,dx\right)dt$$

$$[\text{Fubini}] \quad = \frac{1}{2\pi}\int_a^b\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\varphi_X(t)\,dt\right)dx.$$

Für $b-a\to 0$ ist auch $F_X(b)-F_X(a)\to 0$.

Somit ist X stetig mit Dichte f.

Satz 6.7 (Stetigkeitssatz) Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ZV mit char. Funktionen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Falls $\varphi_n(t)\to\varphi(t)$, $t\in\mathbb{R}$, dann äquivalent:

(1) φ ist char. Funktion

(2) φ stetig in 0

(3) $(P_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist straff $\quad (\forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n: P_{X_n}(-N,N)\geq 1-\varepsilon)$

(4) X_n konvergiert in Verteilung.

Beweis (3)$\iff$(4) aus Satz 5.12, da $\{e^{itx}: t\in\mathbb{R}\}$ trennend. (1)$\Rightarrow$(2) aus Satz 6.2.

(3)$\Rightarrow$(1) Mit Satz von Prokhorov (5.7): es gibt Teilfolge $(P_{X_{n_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ und W-Maß P mit $P_{X_{n_k}} \xrightarrow{w} P$.

Somit

$$\varphi_n(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,dP_{X_{n_k}}(x) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,dP(x)$$

und $\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{itY}]$ mit $P_Y = P$.

(2)$\Rightarrow$(3) Wir bemerken, dass:

Für $u > 0$ ist $P(|Y| > \frac{2}{u}) \leq \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-\varphi_Y(t))\,dt$.

(Übung!). Damit erhalten wir für $u>0$:

$$\limsup_{n\to\infty} P(|X_n| > \tfrac{2}{u}) \leq \limsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-\varphi_n(t))\,dt\right]$$

$$[\text{Fatou}] \quad \leq \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-\varphi(t))\,dt \leq \varepsilon.$$

Da φ stetig in 0, wähle u so klein, dass für $\varepsilon > 0$. ∎

Insbesondere erhalten wir: $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \varphi_n(t) \to \varphi(t),\ t\in\mathbb{R}$

7. Zentraler Grenzwertsatz

<u>Satz 7.1</u> $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt mit $X \in \mathcal{L}^1$. Dann $\frac{1}{n}S_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P} \mathbb{E}[X_1]$.

<u>Beweis.</u> $\mu = \mathbb{E}[X_1]$, $\varphi(t) = \varphi_{X_1}(t) = \mathbb{E}[e^{itX_1}]$. Dann

$$\varphi_{S_n/n}(t) = \left(\varphi_{X_1/n}(t)\right)^n \qquad [\text{Satz 6.2, unabh.}]$$

$$= \left(\varphi_{X_1}(t/n)\right)^n \qquad [\text{Satz 6.2, lin. Kanb}]$$

$$= \Big(\underbrace{\varphi(0)}_{=1} + \frac{\overbrace{\varphi'(0)}^{\varphi'(0)=i\cdot\mu}\cdot\frac{t}{n}}{1} + o\left(\left|\tfrac{t}{n}\right|\right)\Big)^n \qquad [\text{Satz 6.3}]$$

$$= \left(1 + \frac{i\mu t}{n} + o\left(\left|\tfrac{t}{n}\right|\right)\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{i\mu t}.$$

Aber: $e^{i\mu t}$ ist char. Funktion der ZV μ und wir erhalten: $\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{d} \mu$. Da μ konstant folgt Konvergenz in W-keit. ∎

<u>Satz 7.2</u> (Zentraler Grenzwertsatz). Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch mit $\mu = \mathbb{E}[X_1]$, $0 < \sigma^2 = Var[X_1] < \infty$. Dann

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\cdot\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

<u>Beweis</u> OBdA $\mu = 0$ (sonst betrachte $Y_i = X_i - \mu$). Insbesondere $\mathbb{E}[X_1^2] = Var[X_1] = \sigma^2$. Sei $\varphi = \varphi_{X_1}$.

Mit Satz 6.3:

$$\varphi(t) = 1 - \varphi'(0)t + \frac{\varphi''(0)t^2}{2} + o(t^2)$$

und

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}}(t) = \left(\varphi_{X_1/\sigma\sqrt{n}}(t)\right)^n$$

$$= \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

$$[\varphi'(0) = i\mu = 0,\ \varphi''(0) = -\sigma^2] \qquad = \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\frac{t^2}{\sigma^2 n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n$$

$$\longrightarrow e^{-t^2/2}$$

Dies ist aber die char. Fkt von $N(0,1)$. ∎