19/6/17

5. Schwache Konvergenz

(E,d) – Metrischer Raum.

$C_b(E) := \{ f: E \to \mathbb{R} : f \text{ stetig, beschränkt} \}$

Def 5.1 Seien $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}, P$ W-Maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
Die Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen P, falls

$$\int f \, dP_n \xrightarrow{n\to\infty} \int f \, dP \quad \forall f \in C_b(\mathbb{R})$$

Wir schreiben: $P_n \xrightarrow{w} P$.

Satz 5.2 (Portmanteau) Es sind äquivalent:

1) $P_n \xrightarrow{w} P$
2) $\int f \, dP_n \to \int f \, dP$ für alle f beschränkt und gleichmäßig stetig
3) $\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \le P(F) \quad \forall F \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen
4) $\liminf_{n\to\infty} P_n(G) \ge P(G) \quad \forall G \subseteq \mathbb{R}$ offen
5) $\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A) \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}$ messbar mit $P(\partial A) = 0$.

Beweis: 1) ⇒ 2) f gleichmäßig stetig ⇒ f stetig ✓

3) ⇔ 4) F abg. ⇔ $\bar{F}$ offen. Somit

$$P_n(F) = 1 - P_n(\bar{F}) \qquad P(F) = 1 - P(\bar{F})$$

und dann:

$$\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \le P(F) \iff 1 - \liminf_{n\to\infty} P_n(\bar{F}) \le 1 - P(\bar{F})$$
$$\iff \liminf_{n\to\infty} P_n(\bar{F}) \ge P(\bar{F}).$$

2) ⇒ 3) Sei F abg. Wähle $\delta > 0$ und setze für $\varepsilon > 0$

$$G_\varepsilon = \{ x \in \mathbb{R} : \operatorname{dist}(x, F) < \varepsilon \} \qquad [G_\varepsilon \searrow F]$$

Da P stetig von oben: $P(G_\varepsilon) \le P(F) + \delta$. Setze

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t \le 0 \\ 1-t, & t \in (0,1) \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}, \quad f(x) = \varphi\left(\frac{\operatorname{dist}(x,F)}{\varepsilon} \right).$$

Dann: a) f ist gleichmäßig stetig, b) $f(x) = 1$ für $x \in F$, $f(x) = 0$ für $x \notin G_\varepsilon$ und c) $f(x)$ beschränkt. Damit:

$$P_n(F) \overset{b)}{=} \int_F f \, dP_n \le \int_{\mathbb{R}} f \, dP_n$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} P_n(F) \le \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f \, dP_n \overset{2)}{=} \int f \, dP.$$

Ferner $\int_{\mathbb{R}} f \, dP \overset{b)}{=} \int_{G_\varepsilon} f \, dP \le P(G_\varepsilon) \le P(F) + \delta.$

3) ⇒ 1) Sei $f \in C_b(\mathbb{R})$. Dann gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = a \cdot f(x) + b \in (0,1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Somit genügt es, $\int f \, dP_n \to \int f \, dP$ für $f \in C_b(\mathbb{R})$ mit $f(x) \in (0,1)$ nachzuweisen. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$F_i := \{ x : f(x) \ge i/k \}, \quad i \in \{0, \dots, k-1\}$$

F_i ist abg. und $F_0 = \mathbb{R}$, $F_k = \emptyset$. Also

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{i-1}{k} P(F_{i-1} \setminus F_i) \le \int f \, dP \le \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k} \cdot P(F_{i-1} \setminus F_i)$$

$$\text{Linke Seite} = \sum_{i=1}^{k} \frac{i-1}{k}\left(P(F_{i-1}) - P(F_i)\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{i}{k} P(F_i) - \sum_{i=1}^{k} \frac{i-1}{k} P(F_i)$$
$$= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} P(F_i).$$

$$\text{Rechte Seite} = \dots = \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} P(F_i).$$

Die Ungleichungen gelten auch für alle P_n. Somit:

$$\limsup_{n\to\infty} \int f \, dP_n \le \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} P_n(F_i)\right)$$
$$\overset{3)}{\le} \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} P(F_i) \le \frac{1}{k} + \int f \, dP$$

Angewandt auf $-f$ erhalten wir:

$$\liminf_{n\to\infty} \int f \, dP_n \ge \int f \, dP - 1/k$$

Da k beliebig folgt $\lim_{n\to\infty} \int f \, dP_n = \int f \, dP$.

<u>3), 4) ⇒ 5)</u> Notation: A^o = Innere von A, A^a = Abschluss von A. Dann:

$$P(A^a) \overset{3)}{\ge} \limsup_{n\to\infty} P_n(A^a) \ge \limsup_{n\to\infty} P_n(A)$$
$$\ge \liminf_{n\to\infty} P_n(A) \ge \liminf_{n\to\infty} P_n(A^o) \overset{4)}{\ge} P(A^o)$$

Falls $P(\partial A) = 0$ dann $P(A^a) = P(A^o)$ und alle Terme sind gleich.

<u>5) ⇒ 3)</u> Sei F abg. Dann:

$$R_\delta = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{dist}(x,F) = \delta\} \; (= \partial\{x : \operatorname{dist} \le \delta\})$$

Für $\delta_1 < \delta_2$ gilt $R_{\delta_1} \cap R_{\delta_2} = \emptyset$, und somit für höchstens abzählbar viele δ ist $P(R_\delta) > 0$.

Somit gibt es $\delta_1, \delta_2, \dots$ mit $\delta_k \searrow 0$ und $P(\delta_k) = 0$. Für $k \in \mathbb{N}$:

$$\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \le \limsup_{n\to\infty} P_n(\{x : \operatorname{dist}(x,F) \le \delta_k\})$$
$$\overset{5)}{=} P(\{x : \operatorname{dist}(x,F) \le \delta_k\}) \searrow P(F)$$

Da F abg

$$\{x : \operatorname{dist}(x,F) \le \delta_k\} \overset{k\to\infty}{\searrow} F$$

<u>Def 5.3</u> Seien $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ZV. X_n <u>konvergiert in Verteilung</u> gegen X, falls $P_{X_n} \overset{w}{\to} P_X$. Wir schreiben

$$X_n \overset{d}{\to} X.$$

<u>Satz 5.4</u> $X_n \overset{d}{\to} X \iff F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ für alle x an denen F_X stetig ist.

<u>⇒</u>: Aus $P_{X_n} \to P_X$ folgt:

$\forall B \in \mathcal{B}$ mit $P_X(\partial B) = P(X \in \partial B) = 0$ ist $P_{X_n}(B) \to P_X(B)$

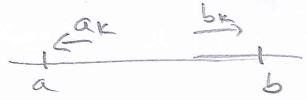
Somit: sei x Stetigkeitsstelle von F. Dann $P_X(\{x\}) = 0$ und

$$P_{X_n}((-\infty, x]) \to P_X((-\infty, x]).$$

<u>⇐</u> Wir zeigen: G offen $\Rightarrow P_X(G) \le \liminf_{n\to\infty} P_{X_n}(G)$.

Sei $G = (a,b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Wähle Folgen $a_k \searrow a$, $b_k \nearrow b$ von Stetigkeitsstellen von F.

Dann für $k \in \mathbb{N}$:



$$
\begin{aligned}
P_X((a_k, b_k]) &= F_X(b_k) - F_X(a_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(F_{X_n}(b_k) - F_{X_n}(a_k) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P_{X_n}((a_k, b_k]) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} P_{X_n}((a,b))
\end{aligned}
$$

Somit auch $P_X((a,b)) \leq \liminf_{n\to\infty} P_{X_n}((a,b))$. $\quad \left[\lim_{k\to\infty} P_X((a_k, b_k]) = P_X((a,b)). \right]$

Für G offen beliebig $\Rightarrow G = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_k$, die G_k disjunkte offene Intervalle.

$$P_X(G) = \sum_{k\in\mathbb{N}} P_X(G_k) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \liminf P_{X_n}(G_k)$$

$$\text{(Fatou)} \quad \leq \liminf_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} P_{X_n}(G_k)$$

Lemma. $\sum_{r \in \mathbb{R}} a_r$ endlich $\Rightarrow$ höchstens abzählbar viele $a_r \neq 0$.

Beweis Für $\delta > 0$ gibt es $\leq S/\delta$ viele r mit $a_r \geq \delta$ $\left(S = \sum_{r \in \mathbb{R}} a_r\right)$. Sei

$$A_\delta = \{ r \in \mathbb{R} : a_r \geq \delta \}, \text{ dann } |A_\delta| \leq S/\delta.$$

$$\Rightarrow \{ r \in \mathbb{R} : a_r \neq 0 \} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{1/n} \text{, also abzählbar.}$$

$$\begin{tikzcd}
1) \arrow[r, Rightarrow] & 2) \arrow[dl, Rightarrow] \\
3) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & 4) \arrow[d, Rightarrow] \\
 & 5) \arrow[ul, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

22/6/17

Satz 5.5. Sei $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar, $D_h = \{x \in \mathbb{R} : h \text{ ist nicht stetig in } x\}$. Dann

$$X_n \xrightarrow{d} X,\ P_X(D_h) = 0 \Rightarrow h(X_n) \xrightarrow{d} h(X).$$

Beweis. Wir zeigen:

$$F \text{ abg.} \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} P_{h(X_n)}(F) \le P_{h(X)}(F).$$

Es gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} P_{h(X_n)}(F) = \limsup_{n\to\infty} P(X_n \in h^{-1}(F)) \quad \text{— Abschluss}$$
$$\le \limsup_{n\to\infty} P(X_n \in \overline{h^{-1}(F)})$$
$$[X_n \xrightarrow{d} X] \quad \le P(X \in \overline{h^{-1}(F)})$$

Behauptung: $\overline{h^{-1}(F)} \subseteq h^{-1}(F) \cup D_h \quad (*)$

Damit:

$$P(X \in \overline{h^{-1}(F)}) = P(X \in h^{-1}(F)) \quad [\text{da } P_X(D_h) = 0]$$
$$= P(h(X) \in F) = P_{h(X)}(F) \quad ✓$$

Beweis von $(*)$: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $h^{-1}(F)$ mit $x_n \to x$. Dann $h(x_n) \in F$, $n \in \mathbb{N}$. Ist h stetig an x (also $x \notin D_h$), so $h(x_n) \to h(x)$ und damit $x \in h^{-1}(F)$

$$\Rightarrow \overline{h^{-1}(F)} \subseteq h^{-1}(F) \cup D_h.$$

Satz 5.6 Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, X, (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ZV.

1) $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$

2) $X_n \xrightarrow{d} X,\ P(X = c) = 1$ für $c \in \mathbb{R} \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$.
Die Implikation ist i.A. falsch, falls kein solches c existiert.

3) $X_n \xrightarrow{d} X,\ Y_n \xrightarrow{d} a,\ Z_n \xrightarrow{d} b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$
$$\Rightarrow X_n Y_n + Z_n \xrightarrow{d} aX + b.$$
Die Implikation ist i.A. falsch, falls keine solche a, b existieren.

5.2. Hinreichende Bedingungen

$$X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)] \quad \forall f \in C_b(\mathbb{R})$$

Sei $\mathcal{G} = \{G : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : G \text{ rechtsstetig, monoton wachsend, } G(-\infty) \ge 0,\ G(\infty) \le 1\}$

Wir schreiben $G_n \Rightarrow G$ falls $G_n(x) \to G(x)$ für jede Stetigkeitsstelle von G.

Satz 5.7 Sei $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathcal{G}$. Dann gibt es Teilfolge $(G_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $G \in \mathcal{G}$ mit $G_{n_k} \Rightarrow G$.
(Auswahlsatz von Helly).

Bemerkung Die Menge der Verteilungsfunktionen ist nicht folgenkompakt.

Def 5.8. 1) Eine Menge von W-Maßen M auf $\mathbb{R}$ heißt relativ folgenkompakt, wenn jede Folge eine schwach konvergente Teilfolge gegen ein W-Maß enthält.
2) M heißt straff, falls

$\forall \varepsilon > 0 : \exists M > 0 : P([-M, M]) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall P \in \mathcal{M}$.

<u>Satz 5.9</u> (Prokhorov) $\mathcal{M}$ Menge von W-Maßen auf $\mathbb{R}$. Dann

$\mathcal{M}$ straff $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}$ relativ folgenkompakt.

<u>Beweis.</u> Sei $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von W-Maßen in $\mathcal{M}$.

"$\Rightarrow$": Helly: es gibt Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$F_{n_k}(x) \to G(x)$ für alle x mit G stetig an x und $G \in \mathcal{G}$

Aus Straffheit:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists a, b$ Stetigkeitsstellen von G:

$F_{n_k}(b) - F_{n_k}(a) \geq 1 - \varepsilon$ für alle $k \geq 1$.

$\Rightarrow G(b) - G(a) \geq 1 - \varepsilon$

und somit $G(-\infty) = 0$, $G(\infty) = 1$

"$\Leftarrow$" Durch Widerspruch. Falls $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht straff, dann

$\exists \varepsilon > 0 : \forall M > 0 : \exists n_0 : P_{n_0}((-M, M)) \leq 1 - \varepsilon$

Sei $\tilde{P}_M = P_{n_0(M)}$ für $M \geq 1$. Da $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relativ kompakt

existieren $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und F mit

$\tilde{F}_{M_k} \xrightarrow{k\to\infty} F$ für alle Stetigkeitspunkte von F

Insbesondere: es gibt Stetigkeitsstellen a, b von F mit

$F(b) - F(a) > 1 - \varepsilon \Rightarrow \underbrace{\tilde{F}_{M_k}(b) - \tilde{F}_{M_k}(a)}_{= \tilde{P}_{M_k}((a,b]) \leq \tilde{P}_{M_k}((-M_k, M_k))} \to \ > 1 - \varepsilon$. ↯

<u>Satz 5.10</u> Sei $p > 0$. Dann:

$\sup_{n\in\mathbb{N}} \{ \mathbb{E}[|X_n|^p] \} < \infty \Rightarrow (P_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ straff.

<u>Beweis.</u> Mit Chebyshev: $P(|X_n| > M) \leq M^{-p}\, \mathbb{E}[|X_n|^p]$. ∎

<u>Def 5.11</u> Eine Menge $K \subseteq C_b(\mathbb{R})$ heißt <u>trennend</u>, falls

$(\forall f \in K : \mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f(Y)]) \Rightarrow P_X = P_Y$.

<u>Satz 5.12</u> Sei K trennend. Dann:

$(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konv. schwach $\Leftrightarrow$ (1) P_n straff (2) für $f \in K$ ex. $\lim_{n\to\infty} \int f \, dP_n$

<u>Beweis.</u> "$\Rightarrow$" aus Def.

"$\Leftarrow$" Mit Prokhorov: es gibt $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $P_{n_k} \xrightarrow{w} P$.

Sei $(n_k')_{k\in\mathbb{N}}$ andere Teilfolge mit Limes P'. Dann:

$\int f \, dP_{n_k} \to \int f \, dP$, $\int f \, dP_{n_k'} \to \int f \, dP'$.

Falls $f \in K$, dann $\int f \, dP = \int f \, dP'$ und somit $P = P'$.

Sei x_0 Stetigkeitsstelle von F mit $F_n(x_0) \not\to F(x_0)$.

Dann $\exists \varepsilon > 0 \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists n$:

$|F_n(x_0) - F(x_0)| > \varepsilon$

Aber $(n(i))_{i\in\mathbb{N}}$ enthält konvergente Teilfolge ↯ ∎