12/6/17

Satz 4.12 Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbb{E}[|X_1|]<\infty$. Dann

$$n^{-1}\cdot S_n \xrightarrow{f.s.} \mathbb{E}[X_1].$$ "Starkes Gesetz"

Sei $Y_n = \mathbb{1}[|X_n|\le n]\cdot X_n$, $S_n' = \sum_{i=1}^n Y_i$.

Lemma 4.13 $n^{-1}\cdot S_n' \xrightarrow{f.s.} \mathbb{E}[X_1] \Rightarrow n^{-1}\cdot S_n \xrightarrow{f.s.} \mathbb{E}[X_1]$.

Beweis. $\sum_{n\ge1} P(X_n\ne Y_n) = \sum_{n\ge1} P(|X_n|>n) \le \mathbb{E}[|X_1|]<\infty$.

Mit Borel-Cantelli: $P(X_n\ne Y_n$ für unendlich viele $n)=0$.

Sei ω s.d. $X_n=Y_n$ für alle bis auf endlich viele n.

Dann: es gibt $n_0\in\mathbb{N}$ mit $X_n=Y_n$ für alle $n\ge n_0$

und $\frac{S_n-S_n'}{n} = \frac{S_{n_0}-S_{n_0}'}{n} \to 0$. □

Lem. 4.14 $\sum_{n\ge1} n^{-2}\cdot\mathbb{E}[Y_n^2] \le 4\cdot\mathbb{E}[X_1]$

Beweis. $\mathbb{E}[Y_n^2] = 2\int_0^\infty x\,P(|Y_n|>x)\,dx \le 2\int_0^n x\,P(|X_1|>x)\,dx$

$$\Rightarrow \sum_{n\ge1} n^{-2}\mathbb{E}[Y_n^2] \le 2\sum_{n\ge1} n^{-2}\int_0^n x\,P(|X_1|>x)\,dx$$

$$[\text{Fubini}] \quad = 2\int_0^\infty x\,P(|X_1|>x)\sum_{n\ge x} n^{-2}\,dx$$

Aber $\sum_{n\ge x} n^{-2} \le 2/x$ und somit

$$\sum_{n\ge1} n^{-2}\mathbb{E}[Y_n^2] \le 4\int_0^\infty P(|X_1|>x)\,dx$$ □

Beweis (Satz 4.12) ObdA $X_n\ge0$, da

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{f.s.} \mathbb{E}[X_1] \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n \min\{X_i,0\}}{n} \xrightarrow{f.s.} \mathbb{E}[\min\{X_i,0\}]$$

und $$\frac{\sum_{i=1}^n \max\{X_i,0\}}{n} \to \mathbb{E}[\max\{X_i,0\}]$$

Sei $\varepsilon>0$, $\alpha=1+\varepsilon$ und $n_k=\lfloor\alpha^k\rfloor$, $k\in\mathbb{N}$. Dann

$$\sum_{k:n_k\ge m} n_k^{-2} \le 4\sum_{k\ge\lceil\frac{\log m}{\log\alpha}\rceil} \alpha^{-2k} \le \frac{4m^{-2}}{1-\alpha^{-2}}$$

Mit Chebyshev: für $\delta>0$ beliebig

$$\sum_{k\ge1} P\left(\frac{S_{n_k}'-\mathbb{E}[S_{n_k}']}{n_k}>\delta\right) \le \delta^{-2}\cdot\sum_{k\ge1}\frac{\mathrm{Var}[S_{n_k}']}{n_k^2}$$

$$= \delta^{-2}\sum_{k\ge1} n_k^{-2}\cdot\sum_{m=1}^{n_k}\mathrm{Var}[Y_m] \qquad [\text{unabh.}]$$

$$= \delta^{-2}\sum_{m\ge1}\mathrm{Var}[Y_m]\cdot\sum_{k:n_k\ge m} n_k^{-2} \qquad [\text{Fubini}]$$

$$\le \frac{4\delta^{-2}}{1-\alpha^{-2}}\sum_{m\ge1}\mathrm{Var}[Y_m]\,m^{-2} \overset{\text{Lem 4.14.}}{<} \infty$$

Mit Borel-Cantelli:

$$\frac{S_{n_k}-\mathbb{E}[S_{n_k}]}{n_k} \xrightarrow{f.s.} 0.$$

Aus Def: $n_{k+1} \le (1+\varepsilon)n_k$. Für $l\in[n_k,n_{k+1}]$

$$\frac{S_l'}{l} \ge \frac{S_{n_k}'}{n_{k+1}} \ge \frac{1}{1+\varepsilon}\frac{S_{n_k}'}{n_k}, \quad \frac{S_l'}{l} \le (1+\varepsilon)\frac{S_{n_{k+1}}'}{n_{k+1}}.$$

Da $1 - \frac{1}{1+\varepsilon} \leq \varepsilon$:

$$\frac{S_\ell'}{\ell} \geq \frac{S_{n_k}'}{n_k} + \varepsilon \frac{S_{n_k}'}{n_k} \quad , \quad \frac{S_\ell'}{\ell} \leq \frac{S_{n_{k+1}}'}{n_{k+1}} + \varepsilon \frac{S_{n_{k+1}}'}{n_{k+1}}$$

$\Rightarrow$

$$\limsup_{\ell \to \infty} \left| \frac{S_\ell'}{\ell} - \mathbb{E}[X_1] \right| \leq \limsup_{k \to \infty} \left| \frac{S_{n_k}'}{n_k} - \mathbb{E}[X_1] \right| \longrightarrow 0$$

$$+ \varepsilon \limsup_{k \to \infty} \frac{S_{n_k}'}{n_k} \longrightarrow \varepsilon \cdot \mathbb{E}[X_1].$$

⊛