$X_n \xrightarrow{f.s.} X \iff P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$ "P-f.s." $\boxed{8|6|17}$

$X_n \xrightarrow{P} X \iff \forall \varepsilon > 0: \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$

$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X \iff \mathbb{E}[|X_n - X|^p] \to 0 \quad (p \geq 1)$

Lem 4.2 $X_n \xrightarrow{f.s.} X \iff \sup_{k \geq n} |X_k - X| \xrightarrow{P} 0$

Bew. Übung!

Lem 4.3 Falls $\sum_{n \geq 1} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$ für alle $\varepsilon > 0$, dann $X_n \xrightarrow{f.s.} X$

Beweis. $\{\lim_{n\to\infty} X_n \neq X\}$

$= \{\exists \varepsilon > 0 : \forall k \in \mathbb{N} : \exists n \geq k : |X_n - X| \geq \varepsilon\}$

$= \{\exists m \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N} : \exists n \geq k : |X_n - X| \geq 1/m\}$

$= \bigcup_m \bigcap_k \bigcup_{n \geq k} \{|X_n - X| \geq 1/m\}$.

Somit $P(\lim X_n \neq X) = \lim_{m\to\infty} P(\bigcap_k \bigcup_{n \geq k} \{|X_n - X| \geq 1/m\})$

$= \lim_{m\to\infty} P(|X_n - X| \geq 1/m$ unendlich oft$)$

Da $\sum_{n \geq 1} P(|X_n - X| \geq 1/m) < \infty$ folgt mit Borel-Cantelli, dass $P(\lim X_n \neq X) = 0$. ■

Kor 4.4. $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow$ es gibt Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $X_{n_k} \xrightarrow{f.s.} X$.

Beweis. Sei n_k so dass $\forall \varepsilon > 0 : P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq 1/k^2$.
Wende Lem 4.3. auf die n_k's an. ■

Satz 4.5. 1) Sei $1 \leq p_1 \leq p_2$. Dann $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^{p_2}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^{p_1}} X$.

2) Sei $Y \in \mathcal{L}^p$ und $|X_n| \leq Y$, $n \geq 1$. Dann

$$X_n \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} 0.$$

Beweis. 1) $\varphi(x) = |x|^{p_2/p_1}$ ist konvex. Mit Jensen:

$$\underbrace{\mathbb{E}[|X_n - X|^{p_1}]^{p_2/p_1}}_{\varphi(\mathbb{E}[\ldots])} \leq \underbrace{\mathbb{E}[|X_n - X|^{p_1 \cdot \frac{p_2}{p_1}}]}_{\mathbb{E}[\varphi(\ldots)]} \to 0. \ ■$$

2) $\mathbb{E}[|X_n|^p] = \int_{\{|X_n| \leq \varepsilon\}} |X_n|^p \, dP + \int_{\{|X_n| > \varepsilon\}} |X_n|^p \, dP \leq \varepsilon^p + \int_{\{|X_n| > \varepsilon\}} |Y|^p \, dP$.

Aus Annahme: $\forall \varepsilon > 0 : P(|X_n| > \varepsilon) \to 0$. Da $Y \in \mathcal{L}^p$ folgt $\int_{\{|X_n| > \varepsilon\}} |Y|^p \, dP \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Somit $\mathbb{E}[|X_n|^p] \xrightarrow{n\to\infty} 0$. ■

Satz 4.6. Sei $p \geq 1$. Dann $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$

Beweis. $P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_n - X|^p]}{\varepsilon^p} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ■

Satz 4.7 Sei $X_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dann

$X_n \xrightarrow{f.s.} X$, $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X] < \infty \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} X$

Beweis. $\mathbb{E}[|X_n - X|] =$

$= \mathbb{E}[(X - X_n) \mathbb{1}[X \geq X_n]] + \mathbb{E}[(X_n - X) \cdot \mathbb{1}[X < X_n]]$

$= 2 \cdot \underbrace{\mathbb{E}[(X - X_n) \cdot \mathbb{1}[X \geq X_n]]}_{\geq 0,\ \leq X} + \underbrace{\mathbb{E}[X_n - X]}_{\to 0}$.

Da $X \in \mathcal{L}^1$ folgt mit Majorisierter Konvergenz:

$\mathbb{E}[(X-X_n)\mathbb{1}[X \geq X_n]] \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Def. 4.8 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt <u>gleichmäßig integrierbar</u>, falls $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n| \cdot \mathbb{1}[|X_n|>N]] \xrightarrow{N\to\infty} 0$.

Beob. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ g.i. $\Rightarrow \exists c>0$ mit $\mathbb{E}[|X_n|] \leq c$.

Satz 4.9 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ g.i., $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} X$.

Beweis 1) Wir zeigen: $X \in \mathcal{L}^1$. Für $N>0, \varepsilon>0$

$$\mathbb{E}[\min\{|X|,N\}] = \mathbb{E}[\min\{|X|,N\}\,\mathbb{1}[|X_n-X|\leq\varepsilon]] + \mathbb{E}[\min\{|X|,N\}\,\mathbb{1}[|X_n-X|>\varepsilon]]$$

$$\leq \mathbb{E}[\min\{|X|+\varepsilon,N\}] + N\cdot\mathbb{E}[\mathbb{1}[|X_n-X|>\varepsilon]]$$

$$\leq c+\varepsilon + N\cdot P(|X_n-X|>\varepsilon)$$

Damit $\mathbb{E}[|X|] = \mathbb{E}[\lim_{N\to\infty} \min\{|X|,N\}]$

[Mon. Conv.] $\leq \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}[\min\{|X|,N\}] \leq c+\varepsilon$.

2) Wir zeigen: X_n g.i. und $\mathbb{E}[|X|]<\infty \Rightarrow X_n - X$ g.i.

$\mathbb{E}[|X_n-X|\cdot\mathbb{1}[|X_n-X|>N]] =$

$\mathbb{E}[|X_n-X|\cdot\mathbb{1}[|X_n-X|>N]\cdot\mathbb{1}[|X_n|\geq|X|]]$

$+\,\mathbb{E}[$ —— " —— $\cdot\,\mathbb{1}[|X_n|<|X|]]$.

Aus $|X_n-X|>N$, $|X_n|\geq|X|$ folgt

$|X_n|\geq N/2$ und $|X_n-X|\leq 2|X_n|$.

Analog aus $|X_n-X|>N$ und $|X_n|<|X|$ folgt

$|X|\geq N/2$, $|X_n-X|\leq 2|X|$.

$\Rightarrow \mathbb{E}[|X_n-X|\cdot\mathbb{1}[|X_n-X|>N]]$

$\leq \mathbb{E}[2\cdot|X_n|\cdot\mathbb{1}[|X_n|>N/2]] \xrightarrow{\text{da } X_n \text{ g.i.}} 0$

$+\,\mathbb{E}[2|X|\cdot\mathbb{1}[|X|>N/2]] \xrightarrow{\text{maj. konv.}} 0$

3) Aus 1), 2)

$\mathbb{E}[|X_n-X|] = \mathbb{E}[|X_n-X|\,\mathbb{1}[|X_n-X|\leq\varepsilon]] \longrightarrow \leq\varepsilon$

$+\,\mathbb{E}[\quad[>\varepsilon \quad \leq N]] \longrightarrow \leq N\cdot P(>\varepsilon)$

$+\,\mathbb{E}[\quad[\quad \geq N]] \longrightarrow 0$

4.2. <u>Gesetze der großen Zahlen</u>

Gegeben $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Betrachte $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

"Schwaches Gesetz": $\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{P} c \in \mathbb{R}$.

"Starkes Gesetz": $\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{f.s.} c \in \mathbb{R}$.

Def 4.10. Für $X, Y \in \mathcal{L}^2$ ist

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]$$

die <u>Kovarianz</u> von X, Y.

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißen <u>unkorreliert</u>, falls $\mathrm{Cov}[X_i,X_j]=0$ $\forall\, i\neq j$.

Satz 4.11 Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unkorelliert, mit $\mathrm{Var}[X_n] \leq c < \infty$. Dann gilt

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} \xrightarrow{P} 0 \qquad \text{"Schwaches Gesetz".}$$

Beweis $\mathrm{Var}[S_n] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\sum X_i\right]^2$

$$= \sum_{1\leq i,j\leq n} \mathbb{E}[X_i \cdot X_j] - \mathbb{E}[X_i]\,\mathbb{E}[X_j]$$

$$= \sum_{1\leq i\leq n} \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i]^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i] \leq cn.$$

Mit Chebyshev:

$$P\left(\left|\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}[S_n]}{\varepsilon^2 n^2} \leq \frac{c}{\varepsilon^2 n} \to 0.$$

Insbesondere: falls die X_n die gleiche Verteilung haben: $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}[X_1]$.