29/5/17

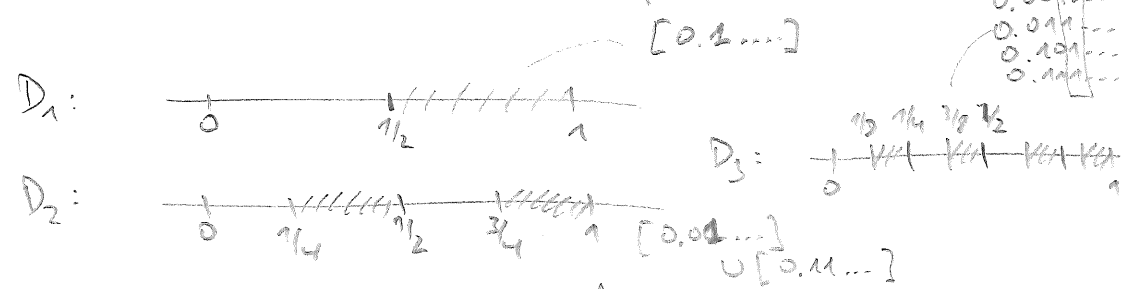
Seien $\mu_1, \mu_2, \ldots$ Verteilungen auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

<u>Satz 3.11</u> Auf dem W-Raum $((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \lambda)$ mit λ Lebesgue-Maß gibt es ZV $X_k : (0,1) \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$!unabhängige! mit $P_{X_k} = P \circ X_k^{-1} = \mu_k$, $k \in \mathbb{N}$.

<u>Beweis</u>. 1. <u>Fall</u>. $\mu_k = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$ (Bernulli mit W-keit $1/2$, faire Münze)

Für $\omega \in (0,1)$ setze

$$X_k(\omega) = \mathbb{1}_{D_k}(\omega), \quad D_k = \bigcup_{i=1}^{2^{k-1}} [(2i-1)2^{-k}, 2i \cdot 2^{-k})$$



Die X_k's sind messbar, und für $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \{0,1\}$

$$P(X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n) = 2^{-n},$$

$\boxed{X_k = 0 \Leftrightarrow k\text{-te Stelle in Binär ist } 0}$

da die Menge $\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) = a_1, \ldots, X_n(\omega) = a_n\}$ aus den Zahlen in $(0,1)$ besteht, deren Binärdarstellung mit $0.a_1a_2\ldots a_n\ldots$ beginnt. Insbesondere

$$P(\{X_i = a_i\}_{1 \le i \le n}) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = a_i)$$

und die X_i's sind unabhängig.

<u>2. Fall</u>. $\mu_k = \mathcal{U}(0,1)$ - Gleichverteilung auf $(0,1)$

Mit den X_k's aus Fall 1:

$U_1 = 0.X_1X_3X_5X_7\ldots \quad (+2)$

$U_2 = 0.X_2X_6X_{10}X_{14} \quad (+4)$

$U_3 = 0.X_4X_{12}X_{20}X_{28} \quad (+8)$

$\vdots$

$$U_k(\omega) = \sum_{i \ge 1} X_{k,i}(\omega) 2^{-i}, \quad X_{k,i} = X_{(2i-1)2^{k-1}}$$

Da die $X_{k,i}$ unabh. sind, sind auch die U_k unabhängig. ($\to$ Z 5.1)

Sei $r = \sum_{1 \le i \le n} a_i 2^{-i}$, $a_i \in \{0,1\}$. Dann

$$P(U_k \in (r, r+2^{-n}))$$

$$= P(X_{k,1} = a_1, \ldots, X_{k,n} = a_n) = 2^{-n} = \lambda(r, r+2^{-n}).$$

Da dyadische Intervalle $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{B}(0,1)$ sind $\to U_k \sim \mathcal{U}(0,1)$.

<u>3. Fall</u> allgemeine μ_k, benutze Quantiltransformat. (Satz 2.3)

$$G_k(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_k(x) \ge u\}$$

$[G_k(u) \le t \Leftrightarrow u \le F_k(t)]$

mit $F_k(x) = \mu_k((-\infty, x])$.

Setze $Y_k(\omega) = G_k(U_k(\omega))$, $k \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega$.

Da die U_k unabh. sind auch Y_k unabh. ☺

3.4. Asymptotische Ereignisse

Bsp 1) $\Omega = \{1,\dots,6\}^{\mathbb{N}}$, $A_n = \{\omega \in \Omega : \omega_n = 6\}$

$\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \{\omega\in\Omega : \omega_n = 6$ für unendlich viele $n\}$

$\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \{\omega\in\Omega : \omega_n \neq 6$ für endlich viele $n\}$

Bsp. 2) $\sum\limits_{n\geq 1} 1/n \to \infty$, $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} < \infty$.

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige ZV mit $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = 1/2$.

$$K = \left\{\omega\in\Omega : \sum_{n\geq 1} \frac{X_n}{n} \text{ konvergiert}\right\}.$$

Beob. In allen Bsp: wenn man nur endlich viele Werte verändert ($\omega_1,\dots,\omega_n$ in Bsp 1, $X_1,\dots,X_n$ in Bsp 2), ändert sich die Zugehörigkeit zum Ereignis nicht.

$\rightsquigarrow$ Asymptotische Ereignisse.

Def 3.12. Sei $I \neq \emptyset$ Indexmenge, $\emptyset \neq J \subseteq I$, $(X_i : \Omega \to \Omega_i)_{i\in I}$ $(\Omega, \mathcal{A})$-$(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$-messbar. Die kleinste σ-Algebra auf Ω bzgl der $(X_i)_{i\in J}$ messbar sind ist

$$\sigma(X_j : j\in J) = \sigma(\{X_i^{-1}(B) : i\in J, B\in\mathcal{A}_i\}) = \sigma\Big(\bigcup_{j\in J} \sigma(X_j)\Big).$$

Def 3.13 Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbar.

1) Ein $A\in\sigma(X_i : i\in\mathbb{N})$ heißt asymptotisch, falls $A\in\sigma(X_i : i\geq n)$ für alle $n\in\mathbb{N}$

2) Die σ-Algebra

$$\mathcal{T} = \bigcap_{n\geq 1} \sigma(X_i : i\geq n)$$

heißt asymptotische σ-Algebra (der $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Bsp $\limsup A_n$, $\liminf A_n$, K von vorher.

$\{X_n \leq 5n$ unendlich oft$\}$ $\{\limsup X_n \leq c\}$

$\{\lim\limits_{n\to\infty} X_n$ existiert$\}$

Satz 3.14 (0-1 Gesetz von Kolmogorov) („Asymptotische Ereignisse sind deterministisch"). Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig, $A\in\mathcal{T}$. Dann $P(A)\in\{0,1\}$.

Beweis. $(\sigma(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig

$\Rightarrow$ $\sigma(X_i : 1\leq i\leq n)$, $\sigma(X_i : i > n)$ unabhängig für alle $n\in\mathbb{N}$ (Übung!)

$\Rightarrow$ $\sigma(X_i : 1\leq i\leq n)$, $\mathcal{T}$ unabhängig für $n\in\mathbb{N}$.

(da $\mathcal{T}\subseteq\sigma(X_i : i > n)$)

Es gilt: $\sigma(X_i : 1\leq i\leq n) \subseteq \sigma(X_i : 1\leq i\leq n+1)$, $n\in\mathbb{N}$.

Somit ist $\bigcup\limits_{n\geq 1} \sigma(X_i : 1\leq i\leq n)$ $\cap$-stabil

Da $\sigma(X_i : i\in\mathbb{N}) = \sigma\Big(\bigcup\limits_{n\geq 1} \sigma(X_i : 1\leq i\leq n)\Big)$

$\Rightarrow$ $\sigma(X_i : i\in\mathbb{N})$, $\mathcal{T}$ unabhängig.

Sei $A \in T$. Dann auch $A \in \sigma(X_i : i \in \mathbb{N})$ und somit

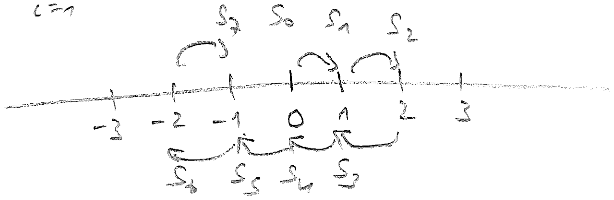
$P(A) = P(A \cap A) = P(A) \cdot P(A) \Rightarrow P(A) \in \{0,1\}$.

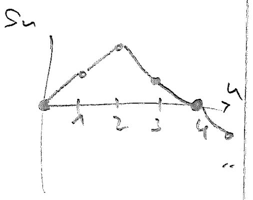
01/06/17

Bsp. Sei $p \in [0,1]$, $q = 1-p$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig mit

$P(X_n = 1) = p \qquad P(X_n = -1) = q \quad , n \in \mathbb{N}$

Sei $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ "Eindimensionale Irrfahrt"





Satz 3.15 $P(S_n = 0 \text{ unendlich oft}) = \begin{cases} 1, & p = 1/2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

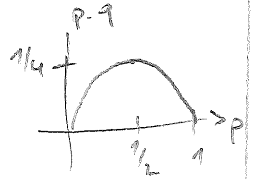
Beweis. 1) $p \neq 1/2$ $S_n = 0$ nur für gerade n möglich.

$P(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n q^n \quad [n \times 1, \ n \times -1]$

$= \frac{(2n)!}{n!n!}(pq)^n \quad \left[\text{Stirling: } \lim \frac{n!}{(\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}} = 1\right]$

Für $\varepsilon > 0$ gibt es $n_0 \geq n$ so dass für $n \geq n_0$:

$P(S_{2n} = 0) \leq (1+\varepsilon)\frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$

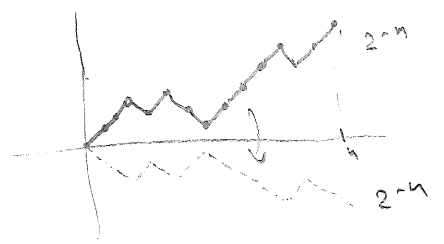


Da $p \neq 1/2$ ist $4pq < 1$ und somit

$\sum_{n\geq 0} P(S_{2n} = 0) < \infty$

Mit Borel-Cantelli: $P(S_n = 0 \text{ unendlich oft}) = 0$.

2) $p = 1/2$.

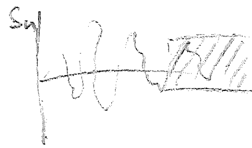


Beob (i) Für $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}$ gilt

$P(S_n \geq t) = P(S_n \leq -t)$

Daraus folgt: $p^+ := P(\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty) = P(\liminf S_n = -\infty) =: p^-$ (Übung!)

Mit Kolmogorov: $p^+, p^- \in \{0,1\}$



Beob (ii) $\{\limsup S_n, \liminf S_n < \infty\}$

$\subseteq \{\exists k : |S_{n+k} - S_n| \geq k \text{ endlich oft}\}$

Mit $A_{n,k} = \{|S_{n+k} - S_n| \geq k\}$ folgt:

$\{\limsup S_n \text{ o. } \liminf S_n = \infty\}$ $(*)$

$\supseteq \bigcap_k \{A_{n,k} \text{ unendlich oft}\}$

Sei $B_{N,k} = A_{Nk,k}$. Die $B_{N,k}$ sind unabhängig.

Ferner $P(B_{N,k}) = 2 \cdot 2^{-k} > 0$ und

$\sum P(B_{N,k}) = \infty$. Mit Borel-Cantelli

$P(B_{N,k} \text{ unendlich oft}) = 1$.

Aus $(*)$ mit Stetigkeit von P:

$P(\limsup S_n \text{ o. } \liminf S_n = \infty)$

$\geq \lim_{K\to\infty} P(\bigcap_{k=1}^{K} B_{N,k} \text{ unendlich oft}) = 1$.

Insgesamt:

$1 = P(\limsup S_n = \infty \text{ oder } \liminf S_n = \infty)$

$\leq P(\limsup S_n = \infty) + P(\liminf S_n = -\infty)$

D.h. p^+ oder $p^- \geq 1/2 \Rightarrow p^+ = p^- = 1$. ∎

4. Gesetze der großen Zahlen

4.1. Konvergenz

Def 4.1. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W-Raum, $X, X_1, X_2, \ldots$ ZV.

1) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast sicher gegen X, falls

$P(X_n \xrightarrow{n\to\infty} X) = 1$. $[X_n \xrightarrow{f.s.} X]$

2) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen X,

$\forall \varepsilon > 0: P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $[X_n \xrightarrow{P} X]$

3) Für $p \geq 1$ konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im p-ten Mittel gegen X, falls $X_n \in \mathcal{L}^p$, $X \in \mathcal{L}^p$ und

$\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \to 0$ $[X_n \xrightarrow{L^p} X]$

Bem 1) $X_n \xrightarrow{f.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$.

Bew Sei $B_N = \{\omega \in \Omega : |X_n - X| < \varepsilon \ \forall n \geq N\}$.

Dann $B_N \nearrow B$ und $B \supseteq \{\omega \in \Omega : X_n \to X\}$.

$\Rightarrow 1 \leq P(B) \leq \lim_{N\to\infty} P(B_N)$. ∎

2) Die Umkehrung gilt nicht. Seien $X_n \sim Be(1/n)$ unabh., also

$X_n = \frac{1}{n}\delta_1 + (1 - \frac{1}{n})\delta_0$, und $X = 0$. Dann für $\varepsilon > 0$

$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P(X_n = 1) = 0$

also $X_n \xrightarrow{P} X$. Ferner

$\sum_{n\geq 1} P(X_n = 1) = \sum_{n \geq 1} 1/n = \infty$.

Da die X_n unab. folgt mit Borel-Cantelli

$P(X_n = 1 \text{ unendlich oft}) = 1$ und somit

$P(X_n \to X) = 0$. $X_n \not\xrightarrow{f.s.} X$.

Wesentlicher Unterschied:

1) $X_n \xrightarrow{f.s.} 0$: es gibt N mit $X_n = 0 \ \forall n \geq N$

2) $X_n \xrightarrow{P} 0$: $P(X_n > 0) \to 1$.

es könnte aber sein, dass $X_n > 0$ unendlich oft.

Lem 4.2 $X_n \xrightarrow{f.s.} X \Leftrightarrow \sup_{k\geq n} |X_k - X| \xrightarrow{P} 0$

Beweis. Für $\varepsilon > 0$ sei

$A_{n,\varepsilon} = \{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}$

und $A_\varepsilon = \limsup_{n\to\infty} A_{n,\varepsilon} = \bigcap_k \bigcup_{n\geq k} A_n$.

Dann ist $\{\omega \in \Omega : X_n \not\to X\} = \bigcup_{m \geq 1} A_{1/m}$

Wir erhalten:

$P(X_n \not\to X) = 0$

$\Leftrightarrow P\left(\bigcup_{m\geq 1} A_{1/m}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{M\to\infty} P\left(\bigcup_{m=1}^{M} A_{1/m}\right) = 0$ [Stetigkeit]

$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}: P(A_{1/m}) = 0$

$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}: P\left(\bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq k} A_{n,1/m}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}: \lim_{k\to\infty} P\left(\bigcup_{n\geq k} A_{n,1/m}\right) = 0$ [Stetigkeit]

$\left[\cancel{\Leftrightarrow \forall m,k \in \mathbb{N}: P\left(\bigcup_{n\geq k} A_{n,1/m}\right) = 0}\right]$

$\Leftrightarrow \forall m: \lim_{k\to\infty} P\left(\sup_{n\geq k} |X_n - X| > 1/m\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sup_{n\geq k} |X_n - X| \xrightarrow{P} 0$

Bem. zu Beweis Satz 3.15

Beob. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in \mathbb{Z}$, $x_n \in \{x_{n-1}-1, x_{n-1}+1\}$

und $x_0 = 0$.

Falls $\limsup x_n = \infty$, $\liminf x_n = -\infty$, dann

$|\{n : x_n = 0\}| = \infty$.

Betrachte n_0 mit $x_{n_0} > 0$. Dann $\inf_{n\geq n_0} x_n \leq -c$

und es gibt $n_1 > n_0$ mit $x_{n_1} < 0$.

Analog falls $x_{n_0} < 0$.