22/5/17

3.2. Mengensysteme

Def 3.4 Sei $I \neq \emptyset$, $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}$ für $i \in I$. Die Familie $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ heißt unabhängig, falls für alle endliche $J \subseteq I$ und alle $A_j \in \mathcal{A}_j$, $j \in J$

$$P\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

Satz 3.5 Ist $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ unabhängig und die $\mathcal{A}_i$'s $\cap$-stabil, dann ist auch $(\sigma(\mathcal{A}_i))_{i\in I}$ unabhängig.

Beweis Sei $\mathcal{D}_i = \mathcal{A}_i \cup \{\Omega\}$, $i \in I$. Die $\mathcal{D}_i$'s sind ebenfalls $\cap$-stabil, und $(\mathcal{D}_i)_{i\in I}$ ist unabhängig.

Sei $J \subseteq I$ endlich, $j_0 \in J$ und $(A_j)_{j \in J\setminus j_0}$, $A_j \in \mathcal{D}_j$.

$$\mathcal{H} = \Big\{ B \in \mathcal{A} : P\Big(B \cap \bigcap_{j\in J\setminus j_0} A_j\Big) = P(B)\cdot \prod_{j\in J\setminus j_0} P(A_j)\Big\}$$

Dann ist $\mathcal{D}_{j_0} \subseteq \mathcal{H}$. Ferner ist $\mathcal{H}$ Dynkin-System:

(D1) $\Omega \in \mathcal{H}$ ✓

(D2) $[A, B \in \mathcal{H},\ B \subseteq A \Rightarrow A\setminus B \in \mathcal{H}]$ Seien $A, B \in \mathcal{H}$. $B \subseteq A$ Dann:

$$P\Big((A\setminus B) \cap \bigcap_{j\in J\setminus j_0} A_j\Big) = P\Big(A \cap \bigcap A_j\Big) - P\Big(B \cap \bigcap A_j\Big)$$
$$= \big(P(A) - P(B)\big) \prod P(A_j)$$
$$= P(A\setminus B) \cdot \prod_{j \in J\setminus j_0} P(A_j) \quad ✓.$$

(D3) $B_n \nearrow B$ aufsteigende Folge mit $B_n \in \mathcal{H}$. Dann

$$P\Big(B \cap \bigcap A_j\Big) = \lim_{n\to\infty} P\Big(B_n \cap \bigcap A_j\Big)$$
$$= \lim_{n\to\infty} P(B_n) \cdot \prod_{j\in J\setminus j_0} P(A_j) = P(B) \cdot \prod_{j \in J\setminus j_0} P(A_j) ✓$$

Also $B \in \mathcal{H}$.

Insgesamt:

$$\sigma(\mathcal{D}_{j_0}) \overset{\mathcal{D}_{j_0}\ \cap\text{-stabil, Satz 1.21.}}{=} \delta(\mathcal{D}_{j_0}) \subseteq \mathcal{H}$$

Und somit $\sigma(\mathcal{D}_{j_0}), (\mathcal{D}_j)_{j\in J\setminus\{j_0\}}$ unabhängig.
Mit Induktion über $|J|$: ✓. ∎

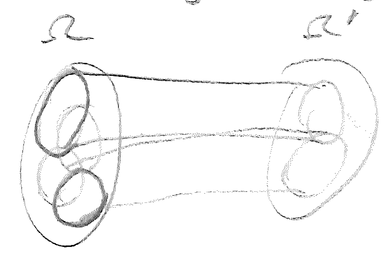
3.3. Zufallsvariablen

Def 3.6 ZV $(X_i)_{i\in I}$, $I \neq \emptyset$ Indexmenge heißen unabhängig, falls $(\sigma(X_i))_{i\in I}$ unabhängig.

Für $(\Omega, \mathcal{A})-(\Omega', \mathcal{A}')$-messbare $X: \Omega \to \Omega'$ ist

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\} \subseteq \mathcal{A}$$

die von X erzeugte σ-Algebra. Es ist die kleinste σ-Algebra bzgl der X messbar ist.



In anderen Worten:

$$(X_i)_{i\in I} \text{ unabh}, \quad X_i : \Omega \to \Omega_i \quad (\Omega,\mathcal{A})-(\Omega_i,\mathcal{A}_i)\text{-messbar}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$P\Big(\bigcap_{j\in J}\{X_j\in B_j\}\Big) = \prod_{j\in J} P(X_j\in B_j) \quad \text{für alle } J\subseteq I, \; |J|<\infty, \; B_j\in \mathcal{A}_j.$$

<u>Lem 3.7.</u> Seien $X_1,\dots,X_n$ ZV. Dann äquivalent:

1) $X_1,\dots,X_n$ unabh.

2) $P(X_1\le x_1,\dots,X_n\le x_n) = \prod P(X_i\le x_i)$ für alle $x_1\dots x_n\in(-\infty,+\infty]$.

3) $F_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$.

<u>Beweis</u> 2) $\Rightarrow$ 1) Sei $\mathcal{A}_i = \{(-\infty,x] ; x\in\mathbb{R}\}$, $1\le i\le n$. <u>Die</u> $(\mathcal{A}_i)_{1\le i\le n}$ sind $\cap$-stabil und erzeugen $\sigma(X_i)$. $\to$ Satz 2.5

<u>Satz 3.8</u> $X_1,\dots,X_n$ unabh. ZV. Dann hat $X=(X_1,\dots,X_n)$ die Verteilung $P_{X_1}\otimes P_{X_2}\otimes\dots\otimes P_{X_n}$.

[ist das Produktmaß, vgl. Satz 1.37]

<u>Beweis.</u> $X_i:\Omega\to\mathbb{R}$ ZV, also $(\Omega,\mathcal{A})-(\mathbb{R},\mathcal{B}_i)$-messbar mit $\mathcal{B}_i=\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $1\le i\le n$. Sei $B_i\in\mathcal{B}_i$, $1\le i\le n$

$$P(\{X_1\in B_1\}\cap\dots\cap\{X_n\in B_n\}) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i\in B_i),$$

da X_i unabh.

$$= \Big(\bigotimes_{i=1}^{n} P_{X_i}\Big)(B_1\times\dots\times B_n)$$

Also $P_X = \bigotimes_{i=1}^{n} P_{X_i}$ auf der Menge

$$\mathcal{A} = \{B_1\times\dots\times B_n : B_i\in\mathcal{B}_i \text{ für } 1\le i\le n\}.$$

Da $\mathcal{A}$ $\cap$-stabil und enthält Erzeuger ist $P_X = \bigotimes_{i=1}^{n} P_{X_i}$ auf $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. $\square$ (Satz 1.18)

<u>Satz 3.9</u> X,Y unabhängige ZV, $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ messbar, und

$$h\ge 0 \quad \text{oder} \quad h(X,Y)\in\mathcal{L}^1(P) \qquad [P = P_X\otimes P_Y]$$

Dann:

$$\mathbb{E}[h(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} h(x,y)\, dP_X(x)\, dP_Y(y)$$

<u>Beweis</u> Aus Def:

$$\mathbb{E}[h(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} h\, d(P_X\otimes P_Y)$$

$$[\text{Fubini}] = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} h(x,y)\, dP_X(x)\, dP_Y(y) \quad \square$$

<u>Bem.</u> Falls $h(x,y) = g(x)\, f(y)$, dann folgt

$$\mathbb{E}[h(X,Y)] = \mathbb{E}[f(Y)]\cdot\mathbb{E}[g(X)]$$

Insbesondere für $X_1,\dots,X_n$ unabh. ZV mit $X_i\ge 0$ oder $X_i\in\mathcal{L}_1$:

$$\mathbb{E}[X_1\cdot\ldots\cdot X_n] = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i]$$

Kor. 3.10. X, Y unabhängige ZV. Dann:

$$P(X+Y \in A) = \int_{\mathbb{R}} P_X(A-y)\, dP_Y(y) \quad \leftarrow \quad \underline{\text{Faltung}} \text{ von } P_X, P_Y \quad (P_X * P_Y).$$

Beweis. Sei $h(x,y) = \mathbb{1}_{\{x+y \in A\}}$. Dann

$$P(X+Y \in A) = \mathbb{E}[h(X,Y)]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{1}_A(x+y)}_{\mathbb{1}_{A-y}(x)}\, dP_X(x)\, dP_Y(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} P_X(A-y)\, dP_Y(y). \qquad \blacksquare$$