18/05/17

Satz 2.10 (Jensen) Sei I Intervall in $\mathbb{R}$,

$\varphi: I \to \mathbb{R}$ konvex, $X: \Omega \to I$ messbar, $X \in \mathcal{L}^1(P)$.

Dann $\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)]$.

Beweis Da φ konvex gibt es für $x_0 \in I$ mindestens eine Gerade die durch $(x_0, \varphi(x_0))$ geht und φ liegt "nicht drunter", also

$$\forall x \in I: \quad \varphi(x) \geq \varphi(x_0) + \lambda(x - x_0). =: g(x)$$

1) $\varphi(X) \in \mathcal{L}^1(P)$. Dann: sei $x_0 = \mathbb{E}[X]$, und

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \varphi \, dP_X \geq \int_{\mathbb{R}} \varphi(x_0) + \lambda(x - x_0) \, dP_X$$

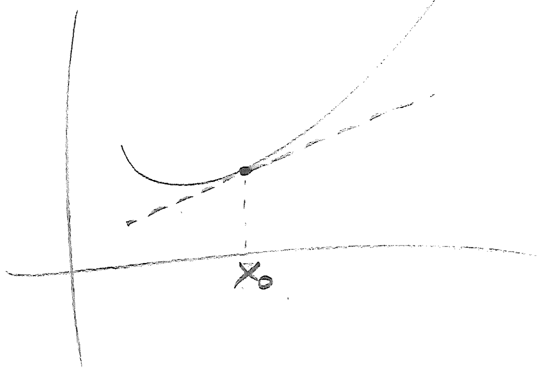
$$= \varphi(x_0) + \lambda \int_{\mathbb{R}} x \, dP_X - \lambda x_0 = \varphi(x_0). \checkmark$$

2) Sei $x_0 = \mathbb{E}[X] \in I$. Die ZV

$$g(X) = \varphi(x_0) + \lambda(X - x_0) \in \mathcal{L}^1(P).$$

Ferner ist $(\varphi - g)(X) \geq 0$ und $\mathbb{E}[(\varphi - g)(X)]$ definiert.

$$\Rightarrow \int \varphi \, dP_X = \underbrace{\int (\varphi - g) \, dP_X}_{\text{def}} + \underbrace{\int g \, dP_X}_{< \infty} \in (-\infty, +\infty].$$



$$\left[\varphi(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda \varphi(x_1) + (1-\lambda)\varphi(x_2) \quad \lambda \in [0,1]. \right]$$

Satz 2.11 (Hölder) Seien $p, q \in (1, +\infty)$ mit $1/p + 1/q = 1$. Dann gilt für ZV X, Y:

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p} \cdot \mathbb{E}[|Y|^q]^{1/q}.$$

Beweis Für $x, y \geq 0$ gilt

$$x^{1/p} \cdot y^{1/q} \leq \frac{1}{p} x + \frac{1}{q} y \quad \text{(Übung!)}$$

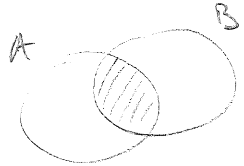
Insbesondere ist für $\omega \in \Omega$

$$\frac{|X(\omega)|}{\mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}} \cdot \frac{|Y(\omega)|}{\mathbb{E}[|Y|^q]^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \frac{|X(\omega)|^p}{\mathbb{E}[|X|^p]} + \frac{1}{q} \frac{|Y(\omega)|^q}{\mathbb{E}[|Y|^q]}$$

Integration über ω:

$$\frac{\mathbb{E}[|XY|]}{\mathbb{E}[|X|^p]^{1/p} \cdot \mathbb{E}[|Y|^q]^{1/q}} \leq 1.$$

3. Unabhängigkeit



3.1. Ereignisse

Aus Stochastik: für $A, B \in \mathcal{A}$

A, B unabh. $\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Def 3.1 Sei $I \neq \emptyset$ Indexmenge, $A_i \in \mathcal{A}$ für alle $i \in I$. $(A_i)_{i\in I}$ heißt unabhängig, falls für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$

$$P\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \prod_{j\in J} P(A_j) \qquad (*)$$

$(A_i)_{i\in I}$ heißt paarweise unabhängig, falls $(*)$ nur für $|J| = 2$ verlangt wird.

Bem. paarweise unabh $\not\Rightarrow$ unabh.

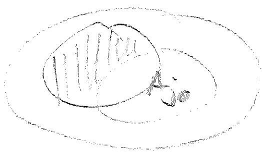
Satz 3.2. Sei $(A_i)_{i\in I}$ unabhängig und $B_i \in \{A_i, \bar{A}_i\}$, $i \in I$. Dann $(B_i)_{i\in I}$ unabhängig.

Beweis. Seien $J^+, J^- \subseteq I$ disjunkt, endlich. Wir zeigen:

$$P\Big(\bigcap_{j\in J^+} A_j \cap \bigcap_{j\in J^-} \bar{A}_j\Big) = \prod_{j\in J^+} P(A_j) \cdot \prod_{j\in J^-} (1 - P(A_j))$$

Induktion über $|J^-|$. $|J^-| = 0$ aus Annahme.

Sei $|J| = n$. Dann sei $j_0 \in J^-$. Wir erhalten:



$$P\Big(\bigcap_{j\in J^+} A_j \cap \bigcap_{j\in J^-\setminus\{j_0\}} \bar{A}_j \cap \bar{A}_{j_0}\Big) =$$

$$= P\Big(\bigcap_{j\in J^+} A_j \cap \bigcap_{j\in J^-\setminus\{j_0\}} \bar{A}_j\Big) - P\Big(\bigcap_{j\in J^+} A_j \cap A_{j_0} \cap \bigcap_{j\in J^-\setminus\{j_0\}} \bar{A}_j\Big)$$

$$\overset{(IA)}{=} \prod_{j\in J^+} P(A_j) \cdot \prod_{j\in J^-\setminus\{j_0\}} P(\bar{A}_j) - \prod_{j\in J^+} P(A_j) \cdot A_{j_0} \cdot \prod_{j\in J^-\setminus\{j_0\}} P(\bar{A}_j)$$

$$= \text{Beh.} \quad \blacksquare$$

Bsp. Werfe zwei Würfel

$\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$, P = Gleichverteilung, also $P(\{(a,b)\}) = 1/6^2$.

$A = \{\text{Summe} = 7\} = \{(1,6), (2,5), \dots (6,1)\}$

$B = \{\text{erster Wurf} = 6\} = \{(6,1), \dots, (6,6)\}$

Dann $|A| = |B| = 6$, $|A \cap B| = 1$, also

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36} = P(A) \cdot P(B)$$

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n \in \mathcal{A}$. Definiere "asymptotische Ereignisse"

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n := \{\omega\in\Omega : \omega\in A_n \text{ für unendlich viele } n\}$$
$$\left(= \{\omega : \forall m\geq 1 : \omega\in \bigcup_{n\geq m} A_n\}\right)$$
$$= \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n\geq m} A_n .$$

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{\omega\in\Omega : \omega\in A_n \text{ für \underline{alle} großen } n\} = \bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{n\geq m} A_n .$$

<u>Bsp.</u> Unendlicher Wurf eines Würfels, $\Omega = \{1,\dots,6\}^{\mathbb{N}}$.

$$A_n = \left\{\omega : \frac{1}{n}\cdot \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{\omega_i = 1\}} \in [a,b]\right\}.$$

Dann $\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left\{\omega : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{\omega_i=1\}} \in [a,b] \text{ für unendlich viele } n\right\}$

<u>Lem 3.3 (Borel-Cantelli)</u> Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n\in\mathcal{A}$ und $A = \limsup A_n$. Dann:

1) $\sum P(A_n) < \infty \Rightarrow P(A) = 0$

2) $\sum P(A_n) = \infty$ und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabh $\Rightarrow P(A) = 1$.

<u>Beweis</u> 1)

$$P(A) = P\left(\lim_{m\to\infty} \bigcap_{m=1}^{M} \bigcup_{n\geq m} A_n\right)$$
$$= \lim_{M\to\infty} P\left(\bigcup_{n\geq M} A_n\right) \qquad \left[\bigcup_{n\geq m} A_n \searrow A\right].$$
$$\leq \lim_{M\to\infty} \sum_{n\geq M} P(A_n) = 0 .$$

2) $$P(\bar{A}) = P\left(\bigcup_{m\geq 1} \bigcap_{n\geq m} \bar{A}_n\right)$$
$$= \lim_{M\to\infty} P\left(\bigcap_{n\geq M} \bar{A}_n\right) \qquad \left[\bigcap_{n\geq m} \bar{A}_n \nearrow \bar{A}\right]$$

Für $M'\in\mathbb{N}$ gilt:
$$P\left(\bigcap_{n=M}^{M'} \bar{A}_n\right) = \prod_{n=M}^{M'} P(\bar{A}_n)$$
$$= \prod_{n=M}^{M'} 1 - P(A_n) \leq \underbrace{e^{-\sum_{n=M}^{M'} P(A_n)}}_{\to 0,\ M'\to\infty} .$$

Somit:
$$P(\bar{A}) = \lim_{M\to\infty} \lim_{M'\to\infty} P\left(\bigcap_{n=M}^{M'} \bar{A}_n\right) = 0 . \quad \blacksquare$$

<u>Bsp.</u> $\Omega = \{1,\dots,6\}^{\mathbb{N}}$,

$$A_n = \{\omega : \omega_n = 6\}$$

Dann $A = \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{\omega\in\Omega : \omega_n = 6 \text{ für unendlich viele } n\}$

$P(A)$ = W-keit, dass unendlich oft 6 gewürfelt wird.