Wdh Satz 1.18 Seien P_i, $i \in \{1,2\}$ W-Maße auf $(\Omega, \mathcal{A}_i)$, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ $\cap$-stabil sowie $P_1(A) = P_2(A)$ $\forall A \in \mathcal{E}$. Dann $P_1(A) = P_2(A)$ $\forall A \in \sigma(\mathcal{E})$

Satz 1.20 Sei $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$. Dann existiert ein kleinstes Dynkin-System (DS) $\delta(\mathcal{A})$, das $\mathcal{A}$ enthält, und

$$\delta(\mathcal{A}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D} \\ \mathcal{D} \text{ DS über } \Omega}} \mathcal{D}$$

Bew.: Z. 1.4

Satz 1.21 (Dynkin'scher Π-λ-Satz) Für jedes $\cap$-stabile Mengensystem $\mathcal{E}$ über Ω gilt $\sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E})$

Lemma 1.22 Falls $\mathcal{D}$ $\cap$-stabil und DS auf Ω, so ist $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra.

Bew.: (i) $\Omega \in \mathcal{D}$ aus (D1)

(ii) Sei $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{D}$ wegen (D2)

(iii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}$. Setze $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$

$\Rightarrow B_n = \Omega \setminus \bigcap_{k=1}^n A_k^c \in \mathcal{D}$ mit (D2) und $\cap$-Stabilität

$\Rightarrow B_n \nearrow \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{D}$ mit (D3) $\square$

Bew (Satz 1.18): Mit Satz 1.21 gilt $\sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E})$

Definiere $\mathcal{D} = \{A \in \sigma(\mathcal{E}) : P_1(A) = P_2(A)\}$, System „guter Mengen"

Beh: $\mathcal{D}$ ist DS:

(D1) $P_1(\Omega) = 1 = P_2(\Omega)$, $\Omega \in \sigma(\mathcal{E}) \Rightarrow \Omega \in \mathcal{D}$

(D2) Seien $A, B \in \mathcal{D}$, $A \supseteq B$. Da P_i additiv:

$$\left.\begin{aligned} P_1(A) &= P_1(A\setminus B) + P_1(B) \\ \| \quad & \qquad\qquad\qquad\quad \| \\ P_2(A) &= P_2(A\setminus B) + P_2(B) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &P_1(A\setminus B) \\ &= P_2(A \setminus B) \end{aligned}$$

Mit $A \setminus B \in \sigma(\mathcal{E})$ folgt $A \setminus B \in \mathcal{D}$

(D3) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, $A_n \in \mathcal{D}$ $\forall n$ und $A_n \nearrow A$. Mit Satz 1.1i

$$P_1(A) = \lim_{n\to\infty} P_1(A_n) = \lim_{n\to\infty} P_2(A_n) = P_2(A)$$
$$\Rightarrow A \in \mathcal{D}$$

Also $\sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}$ $\square$

Bew. (Satz 1.21) „$\supseteq$" klar

„$\subseteq$" Ziel: Zeige, dass $\delta(\mathcal{E})$ $\cap$-stabil, wende Lemma 1.22 an

~~Beh.~~ Sei $B \in \delta(\mathcal{E})$, definiere

$$\mathcal{D}_B := \{A \in \delta(\mathcal{E}) : A \cap B \in \delta(\mathcal{E})\}$$

Beh: $\mathcal{D}_B$ ist DS:

(D1) $\Omega \cap B = B \in \delta(\mathcal{E})$, $\Omega \in \delta(\mathcal{E}) \Rightarrow \Omega \in \mathcal{D}_B$

(D2) $A_1, A_2 \in \mathcal{D}_B$, $A_1 \subseteq A_2$. Dann

$$\underbrace{(A_2 \setminus A_1)}_{\in \delta(\mathcal{E})} \cap B = \underbrace{\overbrace{(A_2 \cap B)}^{\in\delta(\mathcal{E})} \setminus \overbrace{(A_1 \cap B)}^{\in\delta(\mathcal{E})}}_{\in \delta(\mathcal{E}),\ \text{da } (A_1\cap B) \subseteq (A_2 \cap B)}$$

$\Rightarrow A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{D}_B$

(D3) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}_B$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \overset{A_n\in\delta(\mathcal{E})}{\Longrightarrow} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \delta(\mathcal{E})$ und

$$(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)\cap B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{(A_n\cap B)}_{\in \mathcal{D}_B\subseteq\delta(\mathcal{E})} \in \delta(\mathcal{E}), d$$

$$(A_1\cap B)\subseteq (A_2\cap B)\subseteq\dots$$

$\Rightarrow \mathcal{D}_B$ ist DS.

Sei nun $B\in\mathcal{E}$. Dann

- ist $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{D}_B$: Für $A\in\mathcal{E} \overset{\mathcal{E}\ \cap\text{-stabil}}{\Longrightarrow} A\cap B\in\mathcal{E}\subseteq\delta(\mathcal{E})$ $\overset{A\in\delta(\mathcal{E})}{\Longrightarrow} A\in\mathcal{D}_B$
- ist sogar $\delta(\mathcal{E})\subseteq\mathcal{D}_B$, da $\mathcal{D}_B$ selbst DS und $\delta(\mathcal{E})$ kleinstes $\mathcal{E}$ enthaltendes DS.

Sei nun $B\in\delta(\mathcal{E})$. Dann ist $\delta(\mathcal{E})\subseteq\mathcal{D}_B$, denn:

Für $A\in\mathcal{E} \Rightarrow \delta(\mathcal{E})\subseteq\mathcal{D}_A \Rightarrow B\cap A\in\delta(\mathcal{E}) \Rightarrow A\in\mathcal{D}_B$

Also $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{D}_B$ und damit $\delta(\mathcal{E})\subseteq\mathcal{D}_B$ wie oben.

$\Rightarrow \delta(\mathcal{E})$ ist $\cap$-stabil: $\forall A,B\in\delta(\mathcal{E}) \Rightarrow A\in\mathcal{D}_B = A\cap B\in\delta(\mathcal{E})$ □

Korollar 1.23 Stimmen zwei W-Maße auf $\cap$-stabilem Erzeuger überein, so auch auf $\sigma(\mathcal{E})$.

1.4 Das Integral bzgl. eines W-Maßes

(1) Integral bzgl. einfacher Funktion

Def. 1.24 Eine Fkt. φ heißt einfach, falls $\varphi(\omega)=\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega)$ für $\omega\in\Omega$. Das Integral von φ ist dann

$$\int_\Omega \varphi\, dP = \sum_{k=1}^{n} a_k P(A_k) \quad \text{und} \quad \int_A \varphi\, dP = \int_\Omega \varphi \mathbb{1}_A\, dP = \sum_{k=1}^{n} a_k P(A_k\cap A)$$

(2) Integral v. nicht-negativen Fkt'en

Lemma 1.25 $\varphi\geq 0$ messbare (mb.) Fkt. Dann existiert eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einfacher Fkt'en mit $\varphi_n(\omega)\nearrow\varphi(\omega)$ $\forall\omega\in\Omega$

Lemma 1.26 $\varphi\geq 0$ mb., $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen einfacher Fkt'en mit $\varphi_n\nearrow\varphi$ und $\psi_n\nearrow\varphi$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int \varphi_n\, dP = \lim_{n\to\infty} \psi_n\, dP$$

Definiere also

$$\int \varphi\, dP = \lim_{n\to\infty}\int\varphi_n\, dP$$

für bel. Folge $\varphi_n\nearrow\varphi$, φ_n einfach. Alternativ:

$$\int\varphi\, dP = \sup\{\int_\Omega \psi\, dP : 0\leq\psi\leq\varphi,\ \psi \text{ einfach}\}$$

(3) Integral bzgl. allg. mb. Fkt'en

Definiere $\varphi^+(\omega) := \max\{\varphi(\omega), 0\}$, $\varphi^-(\omega) := \max\{-\varphi(\omega), 0\}$

φ mb $\Rightarrow \varphi^+, \varphi^-$ mb und $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$. Falls $\int\varphi^+ dP<\infty$ oder $\int\varphi^- dP<\infty$ definiere

$$\int\varphi\, dP = \int\varphi^+ dP - \int\varphi^- dP.$$

φ heißt integrierbar, falls $\int|\varphi|\, dP<\infty$. Schreibe dann $\varphi\in\mathcal{L}^1(P)$

Satz 1.27 (Eigenschaften Lebesgue-Integral)

(i) $\varphi\in\mathcal{L}^1(P)$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $P(A_n)\to 0$. Dann

$$\int_{A_n}\varphi\, dP \to 0$$

(ii) Partitionierung: $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega \Longrightarrow \int_\Omega \varphi\, dP = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n}\varphi\, dP$

(iii) Linearität. Für $a,b \in \mathbb{R}$, φ, ψ mb. gilt

$$\int_\Omega (a\varphi + b\psi)\, dP = a\int_\Omega \varphi\, dP + b\int_\Omega \psi\, dP.$$

(iv) Monotonie. φ, ψ mb, $\psi \geq \varphi \Rightarrow \int \varphi\, dP \leq \int \psi\, dP$

(v) Δ-UGL. $\left|\int \varphi\, dP\right| \leq \int |\varphi|\, dP$

(vi) $P(\{\varphi = 0\}) = 1$. Dann $\int \varphi\, dP = 0 \quad \forall \varphi \geq 0$ mb.

(vii) Majorisierte Konv. Seien φ_n, φ mb, existiere $\psi \in \mathcal{L}^1(P)$ sodass $\varphi_n \to \varphi$ und $|\varphi_n| \leq \psi \ \forall n$. Dann $\varphi_n, \varphi \in \mathcal{L}^1$ und $\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n\, dP = \int \varphi\, dP$

(viii) Monotone Konv. $\varphi, (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mb mit $0 \leq \varphi_n \uparrow \varphi$. Dann

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n\, dP = \int \varphi\, dP$$

(ix) Fatou. $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit φ_n mb $\forall n$. Dann

$$\int \liminf \varphi_n\, dP \leq \liminf \int \varphi_n\, dP$$

1.6 Zerlegung von Maßen

Def. 1.28 Seien μ, ν Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$

(a) μ heißt absolut stetig bzgl. ν $(\mu \ll \nu)$ falls $\forall A \in \mathcal{A}: \nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$

(b) μ und ν heißen äquivalent $(\mu \approx \nu)$, falls $\mu \ll \nu$ und $\nu \ll \mu$

(c) μ heißt singulär $(\mu \perp \nu)$ bzgl. ν, falls $\exists N \in \mathcal{A}: \mu(N) = 0,\ \nu(N^c) = 0$

Beispiele:

- μ bel. Zählmaß. Dann $\mu \perp \lambda$ (λ Lebesguemaß), z.B. mit $N = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
- ν Maß, $f \in \mathcal{L}^1(\nu)$, $f \geq 0$. Dann ist $\mu(A) := \int_A f\, d\nu \quad (A \in \mathcal{A})$ neues Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\mu \ll \nu$ (Umkehrung gilt ebenfalls)