Seminar Proofs from the Book

April 10, 2014

DAS Buch der Beweise

"You don't have to believe in God, but you should believe in The Book." - Paul Erdös

1. DAS Buch der Beweise - geht auf eine Idee des berühmten Mathematikers Paul Erdös (1913 - 1996) zurück.
2. Gott bewahrt die *perfekten* Beweise für alle mathematische Sätze in einem Buch auf.
3. Martin Aigner und Günter Ziegler verfassten eine erste Version davon...

Paul Erdös - Random Facts

1. Über 1500 Veröffentlichungen
2. Arbeitete in Kombinatorik, Zahlentheorie und Mengenlehre
3. Die Erdös Zahl eines Mathematikers: Erdös hat die Zahl 0, Koautoren von Erdös haben die Zahl 1, Koautoren von Koautoren von Erdös (die nicht direkt mit ihm veröffentlicht haben) haben die Zahl 2, usw.

Literatur

Eine kostenlose elektronische Fassung (der 4. Ausgabe) stellt der Mitautor Martin Aigner auf seiner Webpage zur Verfügung. Einfach nach "proofs from the book" googeln.

Ablauf

1. Die Teilnehmer bereiten je einen Vortrag vor
2. Spätestens eine Woche vor dem Vortragstermin bitte (gut vorbereitet!) bei Prof. Panagiotou zur Vorbesprechung vorbeischauen.
3. Wichtig: Anwesenheitspflicht bei den Vorträgen, maximal 2 Fehltermine.

Vortragsthemen

Im Folgenden eine keine kurze Übersicht der Vortragsthemen. Die Themen sind unterschiedlich schwer, da das Seminar für Teilnehmer mit unterschiedlichen Vorkenntnissen gedacht ist.

1. Thema: Infinity of Primes, Bertrand's Postulate (Kapitel 1 und 2) - easy!

1. Analytische, algebraische und topologische Beweise dafür, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.
2. Beispiel: $\log(x) \leq 1 + |\{p \mid p \text{ prime }, p \leq x\}|$.
3. Beispiel: $\sum_{p \text{ prime}} \frac{1}{p} = \infty$
4. Beweis von Bertrand's Postulate: Für alle $n \geq 1$ gibt es eine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$.

2. Thema: Three times $\pi^2/6$ (Kapitel 8) - easy!

1. Beweis von $\zeta(2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$.
2. Skizze: $\zeta(2) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dxdy = \ldots = \pi^2/6$.
3. Beweis von $\sum_{k\geq 0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} = \pi^2/8$.
4. Skizze: man beweise von verwende

$$\sum_{k=1}^{m} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m-1)}{6}.$$

3. Thema: Three applications of Euler's formula (Kapitel 12) - medium/hard

1. Euler's Formel: ist G ein zusammenhängender ebener Graph mit n Knoten, e Kanten und f Gebieten, so gilt $n - e + f = 2$.
2. Elementare Eigenschaften ebener Graphen
3. Sylvester-Gallai Theorem: sind n Punkte in der Ebene gegeben die nicht alle zusammen auf einer Geraden liegen, so gibt es eine Gerade die genau zwei der Punkte enthält.
4. Monochromatic Lines: sind zusätzlich die Punkte zweigefärbt, so gibt es eine Gerade die mind. zwei Punkte einer Farbe und keinen der anderen Farbe enthält.
5. Pick's Theorem - how to compute the area of a polygon with integral vertices

4. Thema: Cauchy's Rigidity Theorem (Kapitel 13) - easy

1. Konvexes Polyeder: die konvexe Hülle einer endlichen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Z.B. eine Pyramide, ein Würfel, Dodekaeder, Ikosaeder, ...
2. Zwei konvexe Polyeder P, P' sind kongruent, wenn es eine abstandserhaltende Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(P) = P'$ gibt. (Lin. Alg.: abstandserhaltend $=$ Translation $+$ Orthogonale Abbildung)
3. Informell: Ein konvexes Polyeder P der Dim. 3 hat Ecken, Kanten und Flächen. Bzgl. der Inklusion bilden diese zusammen mit P selbst eine partielle Ordnung.
4. Zwei Polyeder P, P' der Dim. 3 sind kombinatorisch äquivalent, wenn die zugehörigen partiellen Ordnungen isomorph sind.
5. Cauchy's Rigidity: sind zusätzlich die einander entsprechenden Flächen kongruent, so sind P und P' bereits kongruent!!

4. Thema: Cauchy's Rigidity Theorem (Kapitel 13) - easy

1. Konvexes Polyeder: die konvexe Hülle einer endlichen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.
2. Zwei konvexe Polyeder P, P' sind kongruent, wenn es eine abstandserhaltende Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(P) = P'$ gibt. (Lin. Alg: f abstandserhaltend $\Leftrightarrow$ es gibt g orthogonal, $v \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = v + g(x)$ für alle x.)
3. Gibt viel Theorie hierzu: www.math.ku.edu/ bayer/pub/preprints/handbook.pdf
4. Def.: von kombinatorisch äquivalente Polyeder: siehe Tafel
5. Cauchy's rigidity theorem: Sind zwei dreidimensionale konvexe Polyeder P, P' kombinatorisch äuqivalent sodass zusätzlich die zueinander entsprechenden Flächen kongruent sind, so sind P und P' bereits kongruent.

5. Thema: Sets, functions, and the continuum hypothesis (Kapitel 17) - easy/medium

1. Für beliebige Mengen A, B schreibt man $|A| = |B|$ wenn es eine Bijektion von A nach B gibt. Gibt es eine Injektion von A nach B, so schreibt man $|A| \leq |B|$.
2. Das ist eine partielle Ordnung auf der Klasse der Mengen. (Die Reflexivitt ist alles andere als trivial zu sehen, Cantor-Bernstein Satz)
3. Bekannte Resultate: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$, stets $|M| < |P(M)|$ (power set)
4. Kardinalzahlen: Äquivalenzklassen gleichmächtiger Mengen.
5. Continuum Hypotheses: Es gibt keine Menge M mit $|\mathbb{N}| < |M| < \mathbb{R}$. Ist auf Basis der Zermelo-Fränkel Axiome der Mengenlehre nicht entscheidbar, d.h. weder die C.H. noch ihre Negation ist beweisbar.

6. Thema: Pigeon-hole and double counting (Kapitel 25) - easy

1. Pigeon-hole principle: Verteilt man n Objekte in $r < n$ Schachteln so hat mindestens eine der Schachteln am Ende mehr als ein Objekt.
2. Klingt trivial, hat aber interessante Anwendungen: sind $a_1, \ldots, a_{mn+1}$ verschiedene reelle Zahlen, so gibt es eine streng monoton steigende Teilfolge der Länge $m+1$ oder eine streng monoton fallende Teilfolge der Länge $n+1$.
3. Double-counting: Ist $S \subset A \times B$, A, B, endliche Mengen, so gilt

$$|S| = \sum_{a \in A} |\{b \in B \mid (a,b) \in S\}| = \sum_{b \in B} |\{a \in A \mid (a,b) \in S\}|$$

4. Extrem (!!) nützlich in der Kombinatorik. Beispiel: Ist G ein Graph mit n Knoten ohne 4-Zykel, so gilt $|E[G]| \leq \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3})$

7. Thema: Shuffling cards (Kapitel 28) - medium

1. Wie und wie oft muss einen Stapel mischen, damit dieser "ordentlich" durchgemisch ist.
2. Top-in-at-random shuffles: die oberste Karte wird jeweils u.a.r. in den Stapel der restlichen Karten geschoben. Z.B. solange, bis die anfangs unterste Karte zum ersten mal vom Mischer eingeschoben wird. Andere Stop-Zeiten genauso denkbar.
3. Riffle shuffle: teile den Stapel in zwei Hälften und vermische diese.
4. Güte des Mischen wird durch variation distance zur Gleichverteilung gemessen.

8. Thema: Cayley's formula for the number of trees (Kapitel 30) - easy / medium

1. Baum: Azyklischer, zusammmenhängender, einfacher Graph
2. Satz von Cayley: auf einer n-elementigen Knotenmenge U gibt es genau n^{n-2} Bäume.
3. Beweismöglichkeiten: matrix tree theorem, recursion, double counting, ...

9. Thema: Identities vs. Bijections (Kapitel 31) - easy / medium

1. $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ mit $n_1 \geq n_2 \geq \dots n_k \geq 1$, $k \geq 0$ alles natürliche Zahlen, heißt Partition der Zahl n.
2. $p(n)$ sei die Anzahl der Partitionen von n und $p(0) := 1$. Interessante Formel: $\prod_{k\geq 1} \frac{1}{1-x^k} = \sum_{n\geq 0} p(n)x^n$
3. Grenzwerte von Folgen $(f_n(z)$ *formaler* Potenzreihen in einer Variablen sind immer so zu verstehen, dass für alle $k \geq 1$ der Koeffizient $[z^k]f_n(z)$ für hinreichend große n stabilisiert, also konstant wird.
4. $p_d(n)$ sei die Anzahl der Partitionen von n in *verschiedene* Summanden, $p_d(0) := 1$. Interessante Formel: $\prod_{k\geq 1}(1 + x^k) = \sum_{n\geq 0} p_d(n)x^n$
5. $p_o(n)$ sei die Anzahl der Partitionen von n in ungerade Summanden (also jeder Summand ist $\equiv 1 mod 2$), $p_o(0) := 1$. Interessante Formel: $\prod_{k\geq 1} \frac{1}{1-x^{2k-1}} = \sum_{n\geq 0} p_o(n)x^n$

9. Thema: Identities vs. Bijections (Kapitel 31) - easy / medium

1. Wegen $\prod_{k\geq 1}(1+x^k) = \prod_{k\geq 1} \frac{1-x^{2k}}{1-x^k} = \prod_{k\geq 1} \frac{1}{1-x^{2k-1}}$ folgt $p_o(n) = p_d(n)$ für alle n.
2. Alternativer Beweis: direkt über eine Bijektion zwischen den beiden Arten von Partitionen.

10. Thema: The chromatic number of Kneser graphs - medium / hard

1. Chromatic Number of a graph G: das kleinste k mit der Eigenschaft, dass man die Knoten von G mit k Farben so färben kann, dass keine benachbarten Knoten die gleiche Farbe erhalten. Notation $\chi(G)$.
2. Kneser graph $K(n,k)$: Knotenmenge ist $\binom{[n]}{k}$, A, B sind benachbart wenn $A \cap B = \emptyset$.
3. Theorem: $\chi(K(2k+d,k)) = d+2$
4. Beweis ist *geometrisch*, mittels des Borsuk-Ulam Lemma: Für jede stetige Abbildung $f : S^d \to \mathbb{R}^d$ gibt es ein $x \in S^d$ mit $f(x) = f(-x)$.

11. Thema: Probability makes counting (sometimes) easy (Kapitel 40)

1. Die probabilistische Methode: um zu zeigen, dass eine Menge M ein Element mit einer bestimmten Eigenschaft E besitzt, wählt man ein zufälliges Element $\omega \in M$ und zeigt $\mathbb{P}(\omega \text{ hat Eigenschaft } E) > 0$.
2. Hat viele Anwendunge in der Kombinatorik!
3. Beispiel: Für jedes $k \geq 2$ gibt es einen Graph G mit $\chi(G) > k$ und der kürzeste Zykel in G hat Länge $> k$.
4. diagonal Ramsey number $R(k, k)$: das kleinste k, sodass jeder Graph mit mindestens k Knoten die Eigenschaft besitzt, dass jede beliebige 2-Färbung der Knoten (benachbarte Kanten dürfen auch die gleiche Farbe bekommen) einen einfarbigen vollständigen Teilgraphen mit k Knoten ergibt.
5. Beispiel: $R(k, k) \geq 2^{k/2}$ mittels probabilistischer Methode

Vortragstermine

Seminar findet nicht statt zu den Terminen

1. 17. April (Ostern)
2. 1. Mai (Maifeiertag)
3. 29. Mai (Christi-Himmelfahrt)

Es bleiben also 24. April, 8., 15. und 22. Mai, 5., 12., 19. und 26. Juni, 3. und 10. Juli.