Sommersemester 2019

Diskrete Mathematik

Übungsblatt 12

Prof. Dr. K. Panagiotou/S. Reisser

Aufgabe 2

Sei X die Anzahl der K_4's im $G_{n,p}$, wobei $p = cn^{-2/3}$, $c > 0$. Bestimmen Sie mit Janson's Ungleichungen

$$\lim_{n\to\infty} P(X = 1).$$

Lösung

Für $S \in \binom{[n]}{4}$ sei X_S die Indikatorfunktion, dass auf der Menge $S \subseteq V(G_{n,p})$ ein K_4 ist. Wir schreiben damit mit Bayes Formel

$$\mathbf{P}(X = 1) = \sum_{S\in\binom{[n]}{4}} \mathbf{P}(X_S = 1) \cdot \mathbf{P}(X = 1 \mid X_S = 1) = p^6 \sum_{S\in\binom{[n]}{4}} \mathbf{P}(X = 1 \mid X_S = 1). \quad (1)$$

Betrachten wir nun den Wahrscheinlichkeitsterm. Wir zeigen im folgenden, dass die die Symmetrieeigenschaft

$$\mathbf{P}(X = 1 \mid X_S = 1) = \mathbf{P}(X = 1 \mid X_{S'} = 1) \text{ für alle } S, S' \in \binom{[n]}{4}. \quad (2)$$

gilt; das impliziert, dass wir in (1) die Summe ersetzen können durch $\binom{n}{4}p^6\mathbf{P}(X = 1 \mid X_S = 1)$ für ein *beliebiges* S. Um (2) zu sehen, sei $G_{n,m,T}$ für $T \in \binom{[n]}{4}$ die Menge der Graphen mit Knotenmenge $[n]$, genau m Kanten, und genau einen K_4, dessen Knoten durch T gegeben sind. Dann gilt

$$\mathbf{P}(X = 1 \mid X_T = 1) = \sum_{m\geq 0} |G_{n,m,T}| p^{m-4}(1 - p)^{\binom{n}{2}-m}, \quad T \in \binom{[n]}{4}. \quad (3)$$

Wir argumentieren, dass $|G_{n,m,T}| = |G_{n,m,T'}|$ für $T, T' \in \binom{[n]}{4}$. Sei dazu $T = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ und $T' = (t'_1, t'_2, t'_3, t'_4)$ mit $t_i < t_{i+1}, t'_i < t'_{i+1}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ und betrachte die Bijektion, die T mit T' tauscht:

$$\phi : [n] \to [n], \qquad v \mapsto \begin{cases} v, & v \in [n] \setminus (T \cup T') \\ t'_i, & v = t_i \ (i \in [4]) \\ t_i, & v = t'_i \ (i \in [4]) \end{cases}.$$

Damit betrachte nun eine Abbildung, die in einem Graph G den K_4 auf T nach T' bewegt, indem die Knotennamen umgetauscht werden:

$$\pi : G_{n,m,T} \to G_{n,m,T'}, \qquad G \mapsto \big([n], \{\phi(u)\phi(v) : uv \in E(G)\}\big).$$

Diese Abbildung ist auch eine Bijektion; damit $|G_{n,mT}| = |G_{n,m,T'}|$ und mit (3) folgt (2).

Wir definieren nun ein neues Maß $\mathbf{P}'$: alle Kanten in $\binom{[n]}{2}$ werden unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p eingefügt, außer die Kanten zwischen $\{n-3, n-2, n-1, n\}$, diese sind mit Wahrscheinlichkeit 1 vorhanden. Sei weiter X' die Anzahl der K_4's ohne den K_4 auf $\{n-3, n-2, n-1, n\}$. Damit folgt aus (1)

$$\mathbf{P}(X=1) = \binom{n}{4} p^6 \cdot \mathbf{P}'(X'=0). \tag{4}$$

Wir schreiben weiter $X' = X_0 + X_1 + X_2 + X_3$, wobei X_i, $0 \le i \le 3$, die Anzahl der K_4's ohne den K_4 auf $\{n-3, n-2, n-1, n\}$ ist, wobei nur K_4's mit i Knoten in $\{n-3, n-2, n-1, n\}$ gezählt werden. Ferner schreiben wir $\mathbf{E}'$ für den Erwartungswert bezüglich des Maßes $\mathbf{P}'$.

Wir berechnen nun $\mathbf{P}'(X_i = 0)$ für $0 \le i \le 3$. Insbesondere ist X_0 die Anzahl der K_4's auf einem $G_{n-4,p}$ und aus der Vorlesung wissen wir dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}'(X_0 = 0) = e^{-c^6/24}.$$

X_1: Wir berechnen den Erwartungswert:

$$\mathbf{E}'[X_1] = \binom{4}{1}\binom{n-4}{3} p^6 = \frac{4n^3p^6}{6}(1+o(1)) = \frac{4c^6}{6n}(1+o(1)) = o(1).$$

Mit der Ersten-Moment-Methode folgt, dass $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}'(X_1 = 0) = 1$.

X_2: Für den Erwartungswert gilt:

$$\mathbf{E}'[X_2] = \binom{4}{2}\binom{n-4}{2} p^5 = \frac{6n^2p^5}{4}(1+o(1)) = \frac{6c^6}{4n^{4/3}}(1+o(1)) = o(1).$$

Es folgt wieder, dass $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}'(X_{(2)} = 0) = 1$.

X_3:

$$\mathbf{E}'[X_3] = \binom{4}{3}\binom{n-4}{1} p^3 = 4np^3(1+o(1)) = \frac{4c^6}{n}(1+o(1)) = o(1),$$

womit wieder folgt, dass $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}'(X_{(3)} = 0) = 1$.

Wir schätzen nun ab. Es gilt einmal, dass

$$\begin{aligned}\mathbf{P}'(\bigcap_{i=0}^{3} X_i = 0) &= 1 - \mathbf{P}'(\bigcup_{i=0}^{3} X_i > 0) \ge 1 - \sum_{i=0}^{3} \mathbf{P}'(X_i > 0) \\ &= \mathbf{P}'(X_0 = 0) - \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}'(X_i > 0) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-c^6/24}.\end{aligned}$$

Für die obere Grenze gilt jedoch ebenso

$$\mathbf{P}'(\bigcap_{i=0}^{3} X_i = 0) \le \mathbf{P}'(X_0 = 0) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-c^6/24}.$$

Damit gilt insgesamt $\mathbf{P}'(X'=0) = \mathbf{P}'(\bigcap_{i=0}^{3} X_i = 0) \to e^{-c^6/24}$, womit wir aus (4) erhalten, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X=1) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{4} p^6 \mathbf{P}'(X'=0) = \frac{c^6}{24} \cdot e^{-c^6/24}.$$