Sommersemester 2019

Diskrete Mathematik

Übungsblatt 3

Prof. Dr. K. Panagiotou/S. Reisser

Die Aufgaben werden in der Übung am 13.05. besprochen.

Aufgabe 1

Zeigen Sie für $\ell \in \mathbb{N}_0, m, n \in \mathbb{Z},\ s \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{\ell}{m+k}\binom{s}{n+k} = \binom{\ell+s}{\ell-m+n},$$

und folgern Sie damit für $n \in \mathbb{N}_0$, dass

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{n}{k}\binom{s}{k} k = s\binom{n+s-1}{n-1}.$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie für $\ell, m, n, q \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq q$

$$\sum_{0 \leq k \leq \ell} \binom{\ell-k}{m}\binom{q+k}{n} = \binom{\ell+q+1}{m+n+1}.$$

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie die Identitäten

$$x^{\overline{n}} = \sum_k \overline{S}_{n,k} x^k, \quad x^n = \sum_k S_{n,k}(-1)^{n-k} x^{\overline{k}}.$$

Aufgabe 4

Seien $a > b > 0$. Zeigen Sie, dass $e^{H_{\lfloor an \rfloor} - H_{\lfloor bn \rfloor}} = a/b + o(1)$.

Aufgabe 5

Sei $0 < \epsilon < 1, c > 1$. Ordnen Sie folgende Funktionen nach ihrem asymptotischen Wachstum:

$$e^{\epsilon\sqrt{\log n}}, c^{c^n}, (\log n)^{\log n}, n^{2n+\sqrt{n}}, (\log n)^{\epsilon n}, n^c, 2^n, \log n, n^n, n!, n^{\log n}, n^{1/\log\log n}.$$

Aufgabe 6

Sei $f(n) = o(1)$ und $f(n)g(n) = O(1)$. Zeigen Sie, dass

$$(1 + O(f(n)))^{O(g(n))} = 1 + O(f(n)g(n)).$$

Aufgabe 7

Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f(n) = \Omega(\log n)$. Zeigen Sie, dass $f(n)! = \omega(n^c)$.

Aufgabe 8

Zeigen oder widerlegen Sie für $n \to \infty$:

- $\frac{1}{1+o(1)} = 1 + o(1)$.
- $e^{o(1)} = 1 + o(1)$.
- $1 + 2/n + O(n^{-2}) = (1 + 2/n)(1 + O(n^{-2}))$.
- $e^{(1+O(1/n))^2} = e + O(1/n)$.
- $(n + 2 + O(n^{-1}))^n = e^2 n^n + O(n^{n-1})$.

Aufgabe 9

Zeigen Sie für $n \to \infty$

$$\sum_{k \geq 0} \frac{\sqrt{n + 2^k}}{k!} = \sqrt{n}(e + e^2/(2n)) + O(n^{-3/2}).$$

Um die Aussage zu beweisen, argumentieren Sie zunächst dass für $k = o(\ln n)$

$$\sqrt{n + 2^k} = \sqrt{n}\,(1 + 2^{k-1} n^{-1} + O(2^{2k} n^{-2})).$$