Sommersemester 2016

Diskrete Mathematik

Übungsblatt 10

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Die Aufgaben werden in der Übung am 24.06. besprochen.

Aufgabe 1

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie:

$$2m(G) = |V| - \max_{S \subseteq V}\{q(G[V \setminus S]) - |S|\}.$$

Aufgabe 2

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei G_n der Graph mit Knotenmenge $\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$ und Kanten $a_i a_{i+1}, b_i b_{i+1} (1 \le i \le n-1)$ und $a_i b_i (1 \le i \le n)$. Bestimmen Sie die Anzahl der perfekten Matchings von G_n.
Hinweis: Stellen Sie eine Rekursion auf.

Aufgabe 3

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Zeigen Sie:

a) Falls zusätzlich $|E| = |V| - 1$, dann $\chi(G) \in \{1, 2\}$.

b) Falls zusätzlich $|E| = |V|$, dann $\chi(G) \in \{2, 3\}$.

Aufgabe 4

Sei G ein Baum mit mindestens zwei Knoten. Zeigen Sie, dass $dg(G) = 1$.

Aufgabe 5

Beweisen oder widerlegen Sie: jeder Graph G hat eine $\chi(G)-$Färbung, in der eine Farbklasse $\alpha(G)$ Knoten enthält.

Aufgabe 6

Ein *Intervallgraph* $G = (V, E)$ hat Knotenmenge $V = (I_1, I_2, \dots, I_n)$, wobei jedes I_j ein Intervall $[a_j, b_j] \subset \mathbb{R}$ ist, und $I_i I_j \in E$ genau dann, wenn $I_i \cap I_j \neq \emptyset$.

Sei G ein Intervallgraph. Zeigen Sie, dass $\chi(G) = \omega(G)$.

Aufgabe 7

In dieser Aufgabe soll die Güte des Greedy Algorithmus untersucht werden.

a) Zeigen Sie: es gibt ein $C > 0$ so dass für jedes $n \ge 2$ ein Baum T mit $v(T) = n$ und eine Permutation π von $V(T)$ existieren, so dass $\chi_g(T, \pi) \ge C \log n$.

b) Zeigen Sie: es gibt ein $C > 0$ so dass für jedes $n \ge 2$ ein bipartiter Graph G mit $v(G) = 2n$ und eine Permutation π von $V(G)$ existieren, so dass $\chi_g(G, \pi) \ge Cn$.

Aufgabe 8

Sei $s \in \mathbb{R}_{>0}$. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit der Eigenschaft $e(G[U]) \leq s|U|$ für alle $U \subseteq V$. Zeigen Sie, dass $\chi(G) \leq 2s + 1$.