Sommersemester 2016

# Diskrete Mathematik

## Übungsblatt 9

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

*Die Aufgaben werden in der Übung am 17.06. besprochen.*

**Aufgabe 1**

Ein *Eulerweg* in einem Graph ist ein Weg, der jede Kante genau einmal enthält. Im Gegensatz zu einer Eulertour muss ein Eulerweg nicht zwingend den gleichen Start- und Endknoten haben.
Formulieren Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Eigenschaft, dass ein Graph einen Eulerweg besitzt, und beweisen Sie Ihre Aussage.

**Aufgabe 2**

Sei $G$ ein $2k$-regulärer Graph für ein $k \in \mathbb{N}$. (Ein Graph ist $d$-regulär, wenn alle Knoten Grad $d$ haben.) Zeigen Sie: es gibt einen Teilgraph $H$ von $G$ so dass

- $H$ ist 2-regulär und
- die Knotenmengen von $H$ und $G$ sind gleich.

*Hinweis: Alle Knotengrade von $G$ sind gerade.*

**Aufgabe 3**

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Gegeben sei ein Dominospiel mit Steinen der Form $\boxed{\text{x} \mid \text{y}}$, wobei $x, y \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq x \leq y \leq n$.
**a)** Wie viele Steine hat dieses Dominospiel?
**b)** Ist es möglich, die Steine so in einer Reihe anzuordnen, dass (wie beim Dominospiel üblich) bei anliegenden Steinen die angrenzenden Zahlen jeweils gleich sind?

**Aufgabe 4**

Zeigen Sie, dass $Q_d$ für $d \geq 2$ hamiltonisch ist.

**Aufgabe 5**

Sei $G = (V, E)$ ein hamiltonischer Graph. Zeigen Sie: für jede Menge $S \subseteq V$ hat $G[V \setminus S]$ höchstens $|S|$ Komponenten.

**Aufgabe 6**

Sei $G$ ein bipartiter und $k$-regulärer Graph für ein $k \in \mathbb{N}$. Zeigen oder widerlegen Sie: $G$ hat ein perfektes Matching.

**Aufgabe 7**

Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Bestimmen Sie:

1. Die Anzahl der perfekten Matchings vom $K_n$.

2. Die Anzahl der perfekten Matchings vom $K_n$, die Kante $\{1, 2\}$ enthalten.
3. Die Anzahl der perfekten Matchings vom $K_n$, die Kante $\{1, 2\}$ nicht enthalten.

### Aufgabe 8

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine *Orientierung* von $G$ ist eine Abbildung $h : E \to V$, so dass $h(e) \in e$ für alle $e \in E$, und $|h^{-1}(v)| \leq 1$ für alle $v \in V$.
Sei $G$, so dass $e(G[U]) \leq |U|$ für alle $U \subseteq V$. Zeigen Sie, dass $G$ eine Orientierung besitzt.

### Aufgabe 9

Was ist die maximale Anzahl an Springern, die auf einem Schachbrett platziert werden können, sodass sich keine zwei davon bedrohen? (Für die Schachregeln, falls notwendig, konsultieren Sie wikipedia.)