Sommersemester 2016

Diskrete Mathematik

Übungsblatt 1

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Die Aufgaben werden in der Übung am 22.04. besprochen.

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe untersuchen wir einige Eigenschaften der Josephus-Zahl $J(n)$, $n \in \mathbb{N}$, aus der Vorlesung.

1. Betrachten Sie die Binärdarstellung von n, d.h.

$$n = b_k\, 2^k + b_{k-1}\, 2^{k-1} + \cdots + b_1\, 2^1 + b_0\, 2^0$$

   mit $b_k = 1$. Bestimmen Sie die Binärdarstellung von $J(n)$.

2. Für welche n gilt $J(n) = n$?

3. Sei $a_0 = n$ und $a_i = J(a_{i-1})$ für $i \geq 1$. Existiert $\lim_{i\to\infty} a_i$? Wenn ja, welcher ist der Wert?

Aufgabe 2

Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Benutzen Sie die Repertoire-Methode, um die Rekursion

$$R_1 = \alpha, \qquad R_n = R_{n-1} + \beta + \gamma n + \delta n^2$$

zu lösen. [*Hinweis*: machen Sie den Ansatz $R_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma + D(n)\delta$.]

Aufgabe 3

Betrachten Sie folgenden (randomisierten) Algorithmus, der aus einer endlichen Menge $\emptyset \neq S \subset \mathbb{N}$ das kleinste Element findet:

KleinstesEl(S) Input: S, Output: $x \in S : y \geq x \,\forall\, y \in S$.

1. **Falls** $|S| = 1$ und $S = \{x\}$, gebe x aus.
2. **Sonst** Wähle $x \in S$ zufällig gleichverteilt.
3. Vergleiche x mit allen anderen Elementen in S und bestimme $\tilde{S} := \{y \in S : y \leq x\}$.
4. Gebe **KleinstesEl**($\tilde{S}$) aus.

Wir definieren die *Laufzeit* des Algorithmus als die Gesamtanzahl der in Schritt 3 ausgeführten Verlgeiche. Sei T_n die erwartete Laufzeit für eine n-elementigen Menge S.

(a) Beweisen Sie, dass

$$T_n = n - 1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i.$$

(b) Lösen Sie die Rekursion und geben sie T_n explizit an.

Aufgabe 4

Lösen Sie die Rekursion

$$T_0 = 5, \quad 2T_n = nT_{n-1} + 3 \cdot n!, n > 0.$$

Aufgabe 5

Berechnen Sie mit der Perturbationsmethode für $x \neq 1$

$$\sum_{1 \leq k \leq n} k(k-1)x^k.$$

Aufgabe 6

Sei

$$S_n = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{1}{k-j}.$$

1. Zeigen Sie, dass $S_n = \sum_{1 \leq k < n} H_k$ indem Sie zuerst über k und dann über j summieren.
2. Zeigen Sie, dass $S_n = nH_n - n$ indem Sie in der Summation k durch $k + j$ ersetzen.