

Blatt 9 - Lösungen

Exercise 1. Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$, wobei $A^1, \dots, A^n$ die Spalten von A sind. Wir zeigen:

A invertierbar $\Leftrightarrow \{A^1, \dots, A^n\}$ lin. unabh. in $\mathbb{R}^n$

Beweis:

a) " $\Rightarrow$ ": Wir nehmen also an, dass A invertierbar ist. Sei T_A definiert durch: $\forall x \in \mathbb{R}^n (T_A(x) = Ax)$

Dann gilt:

$$T_A(x) = Ax = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{n \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n \times 1} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}}_{n \times 1}, \text{ d.h.}$$

$$T_A(x) = \underbrace{x_1}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{A^1}_{\in \mathbb{R}^n} + \dots + \underbrace{x_n}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{A^n}_{\in \mathbb{R}^n}.$$

Da A invertierbar ist gilt:

$$T_A \circ T_A^{-1} = A A^{-1} x = \text{Id}_n x = x = A^{-1} A x = T_A^{-1} \circ T_A,$$

d.h. T_A ist bijektiv mit der inversen Abb. T_A^{-1} (2)
 Insbesondere ist T_A somit injektiv und es
 gilt daher:

$$\text{Ker}(T_A) = \{ \overset{(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n}{\mathbf{0}} \}$$

Um zu zeigen, dass $\{A^1, \dots, A^n\}$ lin. unabh. in $\mathbb{R}^n$
 ist, nehmen wir an: $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ und

$$x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = \mathbf{0}.$$

Es folgt $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Ker}(T_A)$ und somit $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Tatsächlich bemerke man: $(\text{Ker}(T_A) = \{\mathbf{0}\})$

$$\Leftrightarrow \{A^1, \dots, A^n\} \text{ lin. unabh.}$$

b) Für die Implikation " $\Leftarrow$ " nehmen wir an, dass
 $\{A^1, \dots, A^n\} \subset \mathbb{R}^n$ lin. unabh. ist. Damit ist
 T_A injektiv ($\Leftrightarrow \text{Ker}(T_A) = \{\mathbf{0}\}$). Nach Exercise 4

von Blatt 4 ist $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ somit auch
 surjektiv (und bijektiv). D.h.

$$\exists L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : L \circ T_A = T_A \circ L = \text{id}.$$

L ist wieder durch Matrixmultiplikation gegeben, denn

$$\begin{aligned} L(x) &= (L \circ \text{id})(x) = L((L \circ T_A)(x)) = L^2(T_A(x)) \\ &= L^2(x_1 A^1 + \dots + x_n A^n) \stackrel{\text{lin.}}{=} x_1 L^2(A^1) + \dots + x_n L^2(A^n) \end{aligned}$$

Definiere also $L^2(A^1) = L(L(A^1)) =: B^1$

(3)

$$L^2(A^n) = L(L(A^n)) =: B^n \text{ und}$$

$$B = (B^1, \dots, B^n) \in M_n(\mathbb{R}).$$

Dann gilt $L = T_B$ und

$$T_A \circ T_B = T_A \circ L = \text{id}$$

$$\& T_B \circ T_A = L \circ T_A = \text{id}, \text{ somit auch}$$

$$\left. \begin{array}{l} AB = \text{Id}_n \\ \& BA = \text{Id}_n \end{array} \right\} \Rightarrow A \text{ ist invertierbar} \\ (\text{mit } A^{-1} = B) \quad \square$$

Exercise 2 Für $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, zeige:

$$\left(\text{Rank}(T_A) = \text{cRank}(A) \right) \& \left(\dim \text{Ker}(T_A) = n - \text{cRank}(A) \right)$$

Beweis:

• Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$T_A(x) = Ax$ durch eine Linearkombination von

Spalten aus $A = (A^1, \dots, A^n)$ gegeben:

$$T_A(x) = Ax = x_1 A^1 + \dots + x_n A^n. \text{ Somit}$$

gilt $\text{Im}(T_A) = \langle A^1, \dots, A^n \rangle \subseteq \mathbb{R}^m$.

(4)

Damit folgt $\dim(\text{Im}(T_A)) = \dim(\langle A^1, \dots, A^n \rangle)$,

d.h. $\text{Rank}(T_A) = \text{cRank}(A)$.

- Die zweite Aussage folgt aus der Dimensionsformel in Thm. 2.4.8 (siehe Skript), da T_A linear ist:

$$\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\text{Ker}(T_A)) + \dim(\text{Im}(T_A))$$

$$\Rightarrow n = \dim(\text{Ker}(T_A)) + \underbrace{\dim(\langle A^1, \dots, A^n \rangle)}_{=: \text{cRank}(A)}; \text{ d.h.}$$

$$\dim(\text{Ker}(T_A)) = n - \text{cRank}(A). \quad \square$$

Exercise 3.

„Gegeben eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems erhalten wir den Lösungsraum dieses Systems aus dem Lösungsraum des homogenen Systems wie folgt:“

$$\begin{array}{ccccc} X_0 + \text{Sol}_0 = \text{Sol} & & & & \\ \uparrow & \uparrow & \nwarrow & \nwarrow & \\ \text{geg. Lsg. des} & \text{Raum der} & \text{Raum der} & & \\ \text{inhomogenen Systems} & \text{Lsg. des} & \text{Lsg. des} & & \\ & \text{inhomog. Systems} & \text{inhomog. Systems} & & \\ AX = B & AX = 0 & AX = B & & \end{array}$$

• Zeige zunächst: $\text{Sol} \supset X_0 + \text{Sol}_0$. (5)

Sei also X_1 eine Lösung des homogenen Systems, d.h. sei $AX_1 = 0$. Dann gilt:

$$A \cdot (X_0 + X_1) \stackrel{\text{IA ein}}{=} \underbrace{AX_0}_{=B} + \underbrace{AX_1}_{=0} = B,$$

$X_0 + X_1$ löst also das inhomogene System und somit, da die Wahl von X_1 aus Sol_0 beliebig war, gilt $X_0 + \text{Sol}_0 \subset \text{Sol}$.

• Umgekehrt gilt auch: $\text{Sol} \subset X_0 + \text{Sol}_0$, denn: Sei $X_2 \in \text{Sol}$, d.h. $AX_2 = B$. Dann gilt:

$$A \cdot (X_2 - X_0) \stackrel{\text{IA ein}}{=} \underbrace{AX_2}_{=B} - \underbrace{AX_0}_{=B} = 0.$$

D.h., $X_2 - X_0 \in \text{Sol}_0$ und somit

$X_2 \in X_0 + \text{Sol}_0$. Da die Wahl von X_2 aus Sol beliebig war, gilt wiederum:
 $\text{Sol} \subset X_0 + \text{Sol}_0$.

matrix of f with respect to B_X and B_Y is the matrix $A_{f_{B_X B_Y}} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, where $f_{B_X B_Y} := e_{B_Y} \circ f \circ e_{B_X}^{-1}$. If $T: X \rightarrow X$ is linear, we use the notation $T_{B_X} := T_{B_X B_X}$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & X \\ e_{B_X}^{-1} \uparrow & & \downarrow e_{B_X} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{T_{B_X}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Ex 4. (i), (ii)

COROLLARY 3.3.6. Let X be a linear spaces, $n \geq 1$, $B_X := \{v_1, \dots, v_n\}$ and $C_X := \{w_1, \dots, w_n\}$ are bases of X .

(i) If $x \in X$, then $x_{C_X} = A_{(\text{id}_X)_{B_X C_X}} x_{B_X}$ and

$$A_{(\text{id}_X)_{B_X C_X}} = [(v_1)_{C_X} \quad \dots \quad (v_n)_{C_X}]$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \\ e_{B_X}^{-1} \uparrow & & \downarrow e_{C_X} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{(\text{id}_X)_{B_X C_X}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

(ii) $(\text{id}_X)_{B_X} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ and $A_{(\text{id}_X)_{B_X}} = I_n$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \\ e_{B_X}^{-1} \uparrow & & \downarrow e_{B_X} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{(\text{id}_X)_{B_X}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

PROOF. (i) follows immediately from the Theorem 3.3.4. For (ii) we have that $(\text{id}_X)_{B_X} := e_{B_X} \circ \text{id}_X \circ e_{B_X}^{-1} = e_{B_X} \circ e_{B_X}^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$. From the case (i) we have that

$$A_{(\text{id}_X)_{B_X}} := A_{(\text{id}_X)_{B_X B_X}} = [(v_1)_{B_X} \quad \dots \quad (v_n)_{B_X}] = I_n.$$

□

If X, Y are linear spaces with $\dim(X) = n$ and $\dim(Y) = m$, then by the Theorem 2.4.17 we have that $\dim(\mathcal{L}(X, Y)) = mn$ and by the Remark 3.1.2 we have that $\dim(M_{m,n}(\mathbb{R})) = mn$. Hence, by the Corollary 2.4.15 we get $\mathcal{L}(X, Y) \simeq \mathbb{R}^{mn} \simeq M_{mn}(\mathbb{R})$, hence $\mathcal{L}(X, Y) \simeq M_{m,n}(\mathbb{R})$. Next we give a direct proof of this isomorphism.

PROPOSITION 3.3.7. Let X, Y be linear spaces, $n, m \geq 1$, $B_X := \{v_1, \dots, v_n\}$ a basis of X , $B_Y := \{w_1, \dots, w_m\}$ a basis of Y , and let $f, g: X \rightarrow Y$ be linear maps.

Exercise 4.

(6)

(iii): Sei $B_X := \{(1,0), (0,1)\}$

$$C_X := \{(1,0), (0,-1)\}$$

(für $X = \mathbb{R}^2$).

$(\text{id}_{\mathbb{R}^2})_{B_{\mathbb{R}^2} C_{\mathbb{R}^2}}$ ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung, für die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{R}^2}} & \mathbb{R}^2 \\ \uparrow e_{B_X}^{-1} & & \downarrow e_{C_X} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{(\text{id}_{\mathbb{R}^2})_{B_{\mathbb{R}^2} C_{\mathbb{R}^2}}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

kommutiert.

Es soll also gelten:

$$\begin{aligned} (\text{id}_{\mathbb{R}^2})_{B_{\mathbb{R}^2} C_{\mathbb{R}^2}}(x_1, x_2) &= e_{C_{\mathbb{R}^2}} \circ \text{id}_{\mathbb{R}^2} \circ e_{B_{\mathbb{R}^2}}^{-1}(x_1, x_2) \\ &= e_{C_{\mathbb{R}^2}}(e_{B_{\mathbb{R}^2}}^{-1}(x_1, x_2)) = e_{C_{\mathbb{R}^2}}(x_1 \cdot (1,0) + x_2 \cdot (0,1)) \\ &= e_{C_{\mathbb{R}^2}}(x_1, x_2) = e_{C_{\mathbb{R}^2}}(x_1 \cdot (1,0) + (-x_2) \cdot (0,-1)) = \end{aligned}$$

$$= (x_1, -x_2) \Rightarrow (\text{id}_{\mathbb{R}^2})_{B_{\mathbb{R}^2} C_{\mathbb{R}^2}} \neq \text{id}_X = \text{id}_{\mathbb{R}^2} \quad (7)$$

Es gilt zudem, dass $A(\text{id}_{\mathbb{R}^2})_{B_{\mathbb{R}^2} C_{\mathbb{R}^2}} =$
 $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, denn die Spalten von

$A(\text{id}_{\mathbb{R}^2})_{B_{\mathbb{R}^2} C_{\mathbb{R}^2}}$ sind die Koordinatenspaltenvektoren

von $(1,0)$ bzw. $(0,1)$ bzgl. der Basis $C_{\mathbb{R}^2}$:

$B_{\mathbb{R}^2}$

$$= (1,0)_{C_{\mathbb{R}^2}} = (1,0)^T$$

$$= (0,1)_{C_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A(\text{id}_{\mathbb{R}^2})_{B_{\mathbb{R}^2} C_{\mathbb{R}^2}} = \left[\underbrace{(\text{id}_{\mathbb{R}^2}(1,0))}_{C_{\mathbb{R}^2}}, \underbrace{(\text{id}_{\mathbb{R}^2}(0,1))}_{C_{\mathbb{R}^2}} \right]$$

wobei

$$(\text{id}_{\mathbb{R}^2}(b_i))_{C_{\mathbb{R}^2}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x_1 \cdot c_1 + x_2 \cdot c_2 = \text{id}_{\mathbb{R}^2}(b_i) = b_i$$

und $B_{\mathbb{R}^2} = \{b_1, b_2\}$ und $C_{\mathbb{R}^2} = \{c_1, c_2\}$

$$\Rightarrow A(\text{id}_{\mathbb{R}^2})_{B_{\mathbb{R}^2} C_{\mathbb{R}^2}} \neq \text{Id}_2$$

Exercise 5. X VR, f, g linear und

(8)

$B_X = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von X
& $B_Y = \{w_1, \dots, w_m\}$ Basis von Y

$$\underline{(i)}: A(f+g)_{B_X B_Y} = [(f+g)(v_1)_{B_Y}, \dots, (f+g)(v_n)_{B_Y}]$$

$$\stackrel{(*)}{=} [f(v_1)_{B_Y} + g(v_1)_{B_Y}, \dots, f(v_n)_{B_Y} + g(v_n)_{B_Y}]$$

$$= \underbrace{[f(v_1)_{B_Y}, \dots, f(v_n)_{B_Y}]}_{=: A f_{B_X B_Y}} +$$

$$+ \underbrace{[g(v_1)_{B_Y}, \dots, g(v_n)_{B_Y}]}_{=: A g_{B_X B_Y}}$$

$$(*) : \text{Sei } f(v_i) = \sum_{j=1}^m x_j w_j$$

$$g(v_i) = \sum_{j=1}^m y_j w_j \text{ und}$$

$$(f+g)(v_i) = \sum_{j=1}^m z_j w_j, \text{ dann}$$

$$\text{gilt } \forall j=1, \dots, m : x_j + y_j = z_j.$$

(ii): $A(\lambda f)_{B_X B_Y} = \lambda \cdot A f_{B_X B_Y}$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$
zeigt man analog zu Teil (i). (9)

(iii): Nach Aufgabe 4(i) von Blatt 4 (bzw. nach Korollar 2.4.12 aus dem Skript) und da $\dim(L(X, Y)) = \dim(M_{m,n}(\mathbb{R})) = m \cdot n$ gilt:

Es reicht zu zeigen, dass $e_{B_X B_Y}$ eine lineare injektive Abbildung ist. Linearität folgt direkt aus (i) und (ii); es bleibt also zu zeigen:

$$\text{Ker}(e_{B_X B_Y}) = \{0\}$$

Beweis: Sei $e_{B_X B_Y}(f) = 0$, d.h.

$$A f_{B_X B_Y} = 0$$

||

$$[f(v_1)_{B_Y}, \dots, f(v_n)_{B_Y}]$$

$$\Rightarrow f(v_i) = \sum_{j=1}^m \underbrace{x_j}_{=0} w_j = 0 \quad \forall i=1, \dots, n$$

$\xRightarrow{\text{f ist 0 auf Basis}}$ $f = 0$ und somit tatsächlich $\text{Ker}(e_{B_X B_Y}) = \{0\}$