Mathematics for Physicists II
Blatt 8 – Solutions

Exercise 1

- $\underset{M_{m,n}(\mathbb{R})}{\underset{\cap}{A}} = [\alpha_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ $\qquad$ $\underset{M_{n,m}(\mathbb{R})}{\underset{\cap}{A^t}} = [\alpha^t_{ji}]_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$,

$\alpha^t_{ji} := \alpha_{ij}$

(i): $(A+B)^t = A^t + B^t$, denn:

- $(A+B)^t = [\alpha_{ij} + \beta_{ij}]^t = [\gamma_{ji}]$, wobei

$\gamma_{ji} := \alpha_{ij} + \beta_{ij}$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ A^t = [\alpha^t_{ji}],\ \alpha^t_{ji} := \alpha_{ij} \\ \cdot\ B^t = [\beta^t_{ji}],\ \beta^t_{ji} := \beta_{ij} \end{array}\right\} \Rightarrow A^t + B^t = [\alpha^t_{ji} + \beta^t_{ji}]$$

$\Rightarrow \alpha^t_{ji} + \beta^t_{ji} = \gamma_{ji}$ $\qquad$ $= [\gamma_{ji}] = (A+B)^t$

(ii) : $(aB)^t = [a\beta_{ij}]^t = [\delta_{ji}]$, wobei

$\delta_{ji} = a\beta_{ij}$ &

$\cdot\ aB^t = a[\beta_{ij}]^t = a[\beta^t_{ji}] = [\alpha\beta^t_{ji}]$

Da $\delta_{ji} = a \cdot \beta_{ij} = a \cdot \beta^t_{ji}$, folgt $(aB)^t = aB^t$

(iii): $(A^t)^t = ([\alpha_{ij}]^t)^t = ([\alpha^t_{ji}])^t = [\Theta_{ij}]$,

wobei $\Theta_{ij} := \alpha^t_{ji}$.

Da $\Theta_{ij} = \alpha^t_{ji} = \alpha_{ij}$, folgt $(A^t)^t = A$.

(iv): $(C + C^t)^t \overset{(i)}{=} C^t + (C^t)^t \overset{(iii)}{=} C^t + C$

$= C + C^t$.

Exercise 2

(i): Sei $\delta_{jk} := \begin{cases} 1, & \text{falls } j=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ („Kronecker-Delta")

- $\underbrace{[\alpha_{ij}]}_{\substack{=A \\ \in M_{m,n}(\mathbb{R})}} \cdot \underbrace{[\delta_{jk}]}_{\substack{=I_n \\ \in M_n(\mathbb{R})}} = \left[\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\delta_{jk}}_{=\alpha_{ik}} \right] = [\alpha_{ik}] = A$

- $\underbrace{[\delta_{ki}]}_{\substack{=I_m \\ \in M_m(\mathbb{R})}} \cdot \underbrace{[\alpha_{ij}]}_{\substack{=A \\ \in M_{m,n}(\mathbb{R})}} = \left[\underbrace{\sum_{i=1}^{m} \delta_{ki}\alpha_{ij}}_{=\alpha_{kj}} \right] = [\alpha_{kj}] = A$

(ii): $A(\underbrace{B+C}_{\in M_{n,l}(\mathbb{R})}) = [\alpha_{ij}] \cdot [b_{jk} + c_{jk}]$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(b_{jk} + c_{jk}) \right] = \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} c_{jk} \right]$$

$$= \underbrace{\left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} b_{jk} \right]}_{=AB} + \underbrace{\left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} c_{jk} \right]}_{=AC} = AB + AC$$

$\underline{(iii)}$: $A \cdot (aB) = [\alpha_{ij}][aB_{jk}]$

$$= \Big[\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(a \cdot \beta_{jk})\Big] = a \underbrace{\Big[\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{jk}\Big]}_{= AB}$$

$$= a(AB)$$

$\underline{(iv)}$: • $\underset{\substack{\uparrow \\ M_{l,s}(\mathbb{R})}}{(AB)D} = \Big(\Big[\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{jk}\Big]\Big)[d_{kr}] =$

$$= \Big[\sum_{k=1}^{l}\Big(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\beta_{jk}\Big)d_{kr}\Big] \quad \&$$

• $A(BD) = [\alpha_{ij}]\Big(\Big[\sum_{k=1}^{l}\beta_{jk}d_{kr}\Big]\Big)$

$$= \Big[\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\Big(\sum_{k=1}^{l}\beta_{jk}d_{kr}\Big)\Big].$$

Bleibt zu bemerken:

$$\sum_{k=1}^{l}\Big(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\beta_{jk}\Big)d_{kr} = \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\beta_{jk}d_{kr}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\Big(\sum_{k=1}^{l}\beta_{jk}d_{kr}\Big).$$

(v) • $A^t \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, $B^t \in M_{l,n}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow B^t A^t \in M_{l,n}(\mathbb{R})$ ist wohl-definiert ✓

• $(AB)^t = \Big[\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{jk}}_{=:\gamma_{ik}} \Big]^t = [\delta_{ki}]$, wobei $\delta_{ki} := \gamma_{ik}$, aber auch

$$B^t A^t = [\beta^t_{kj}][\alpha^t_{ji}] = \Big[\sum_{j=1}^{n} \beta^t_{kj}\alpha^t_{ji}\Big].$$

Da $\delta_{ki} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{jk} = \sum_{j=1}^{n} \beta^t_{kj}\alpha^t_{ji}$, gilt auch

$$(AB)^t = [\delta_{ki}] = \Big[\sum_{j=1}^{n} \beta^t_{kj}\alpha^t_{ji}\Big] = B^t A^t$$

Exercise 3

(i): $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}\left([\underbrace{a_{ij}+b_{ij}}_{=:c_{ij}}]\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$$

$$= \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$$

(ii): $\mathrm{Tr}(\lambda A) = \mathrm{Tr}([\lambda a_{ij}]) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda \cdot \mathrm{Tr}(A)$$

(iii): $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}\left(\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right]\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} \quad \&$$

$$\mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}\left(\left[\sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{jk}\right]\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ij} a_{ji}, \text{ wobei}$$

wir merken:

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ji} b_{ij} =$$

$$= \mathrm{Tr}(BA).$$

$\underline{(iv)}$: $\mathrm{Tr}(B^{-1}AB) = \mathrm{Tr}(B^{-1}(AB))$

$\overset{(iii)}{=} \mathrm{Tr}((AB)B^{-1}) = \mathrm{Tr}(A(BB^{-1})) \underset{\substack{\uparrow \\ B \text{ invert.}}}{=} \mathrm{Tr}(A)$

$\underline{(v)}$: $\mathrm{Tr}(A(B+C)) = \mathrm{Tr}(AB+AC)$

$\overset{(i)}{=} \mathrm{Tr}(AB) + \mathrm{Tr}(AC)$

$\underline{(vi)}$: $\mathrm{Tr}((\lambda A)B) = \mathrm{Tr}(\lambda(AB)) \overset{(ii)}{=}$

$\lambda \cdot \mathrm{Tr}(AB)$

$\underline{(vii)}$: $\underline{\text{Angenommen}}$: $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ &

$AB - BA = I_n$. Dann gilt

$\mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(I_n)$

$\overset{(i)}{\underset{(ii)}{\Longleftrightarrow}} \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$

$\overset{(iii)}{\Longleftrightarrow} \underbrace{\mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(AB)}_{=0} = n$ $\lightning$. Die

Annahme führt zum Widerspruch und somit folgt die Behauptung.

(viii): Angenommen, $A \in M_n(\mathbb{R})$ & $\forall B \in M_n(\mathbb{R}) \, (Tr(AB) = 0)$. Insbesondere gilt dann:

$$Tr(AA^t) = 0$$

$$\| $$

$$Tr\left(\left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \overbrace{\alpha_{kj}}^{= A^t(j,k)} \right] \right)$$

$$\| $$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \alpha_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^2 \quad \text{und}$$

Somit $a_{ij} = 0 \ \forall i$, da

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^2 > 0 \iff a_{ij} = 0 \ \forall \, \substack{i = 1, \dots, n, \\ j = 1, \dots, n}.$$

Exercise 4

(i): Jede Matrix in $Sym_n(\mathbb{R})$ kann ~~lässt sich~~ als Linearkombination von $\frac{n(n+1)}{2}$ in $Sym_n(\mathbb{R})$ lin. unabh. Matrizen eindeutig dargestellt werden:

- n Matrizen mit einer 1 auf der Hauptdiagonalen und Nullen sonst:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{0} \\ & \ddots & \\ \boxed{0} & & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & & \boxed{0} \\ & \ddots & \\ \boxed{0} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ und

- $\frac{n^2-n}{2}$ Matrizen mit einer 1 auf (i,j) mit $i>j$ und einer 1 auf (j,i) und Nullen sonst:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt sind es also

$$n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$ Basismatrizen und damit $\dim(Sym_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$.

(ii): $Tr : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$
$A \mapsto Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ linear,

$$\underbrace{\dim(M_n(\mathbb{R}))}_{=n^2} = \dim(\mathrm{Ker}(Tr)) + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(Tr))}_{=1,\ \text{da } \mathrm{Im}(Tr) = \mathbb{R}}$$

$$\Longrightarrow \underline{\dim(\mathrm{Ker}(Tr)) = n^2 - 1}$$

Exercise 5

$R(\Theta)$ ist eine Drehmatrix, d.h. die Multiplikation mit $R(\Theta)$ entspricht der Drehung um Θ im math. positiven Sinn („gegen den Uhrzeigersinn"):

Sei $x = \begin{pmatrix} r\cos(\tilde{\Theta}) \\ r\sin(\tilde{\Theta}) \end{pmatrix}$, $r \geq 0$, dann gilt

$$R(\Theta) \cdot x = \begin{pmatrix} r\cos(\Theta + \tilde{\Theta}) \\ r\sin(\Theta + \tilde{\Theta}) \end{pmatrix} \text{ (siehe (iii))}.$$

(i): $R(\Theta_1)R(\Theta_2) = \begin{pmatrix} \cos\Theta_1 & -\sin\Theta_1 \\ \sin\Theta_1 & \cos\Theta_1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \cos\Theta_2 & -\sin\Theta_2 \\ \sin\Theta_2 & \cos\Theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Theta_1\cos\Theta_2 - \sin\Theta_1\sin\Theta_2 & -(\cos\Theta_1\sin\Theta_2 + \sin\Theta_1\cos\Theta_2) \\ \underbrace{\sin\Theta_1\cos\Theta_2 + \cos\Theta_1\sin\Theta_2}_{=\sin(\Theta_1+\Theta_2)} & \underbrace{\cos\Theta_1\cos\Theta_2 - \sin\Theta_1\sin\Theta_2}_{=\cos(\Theta_1+\Theta_2)} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Additions-theoreme}}{=} \begin{pmatrix} \cos(\Theta_1+\Theta_2) & -\sin(\Theta_1+\Theta_2) \\ \sin(\Theta_1+\Theta_2) & \cos(\Theta_1+\Theta_2) \end{pmatrix} = R(\Theta_1+\Theta_2).$$

(ii): Die Inverse von $R(\theta)$ ist die Drehmatrix, die zur Drehung um θ „im Uhrzeigersinn" gehört:

$$R(\theta)R(-\theta) \overset{(i)}{=} R(\theta-\theta) = R(0) = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ebenso gilt $R(-\theta)R(\theta) = R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(iii):

$$R(\theta)\begin{pmatrix} r\cos(\tilde{\theta}) \\ r\sin(\tilde{\theta}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} r \begin{pmatrix} \cos\tilde{\theta} \\ \sin\tilde{\theta} \end{pmatrix}$$

$$= r\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\tilde{\theta} - \sin\theta\sin\tilde{\theta} \\ \sin\theta\cos\tilde{\theta} + \cos\theta\sin\tilde{\theta} \end{pmatrix} \overset{\text{Additions-}}{\underset{\text{Theoreme}}{=}} r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta+\tilde{\theta}) \\ \sin(\theta+\tilde{\theta}) \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \left\| R(\theta)\begin{pmatrix} r\cos\tilde{\theta} \\ r\sin\tilde{\theta} \end{pmatrix} \right\| = r \left\| \begin{pmatrix} \cos(\theta+\tilde{\theta}) \\ \sin(\theta+\tilde{\theta}) \end{pmatrix} \right\|$$

$$= r \cdot \underbrace{\sqrt{\cos^2(\theta+\tilde{\theta}) + \sin^2(\theta+\tilde{\theta})}}_{1\text{, denn } \sin^2+\cos^2=1} = r = \left\| \begin{pmatrix} r\cos(\tilde{\theta}) \\ r\sin(\tilde{\theta}) \end{pmatrix} \right\|$$

(iv):

$$R^2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix},$$ denn

nach (i) gilt $R(\theta) \cdot R(\theta) = R(\theta+\theta)$

$$= R(2\theta) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}.$$