

Exercise 1

(i) X, Y VR, $C \subset X$ konvex
 $D \subset Y$ konvex

Z.z.: $C \times D = \{ (c, d) \mid c \in C, d \in D \}$

ist konvex

Seien also $c, c' \in C$, $d, d' \in D$ und $t \in [0, 1]$

Dann gilt:

$$t(c, d) + (1-t)(c', d') =$$

$$= (tc, td) + ((1-t)c', (1-t)d') = (\underbrace{tc + (1-t)c'}_{\in C, \text{ da } C \text{ konvex}},$$

$$\underbrace{td + (1-t)d'}_{\in D, \text{ da } D \text{ konvex}}) \in C \times D$$

$$\Rightarrow C \times D \text{ konvex}$$

(ii) $C, C' \subset X$ konvex;

(2)

zu zeigen ist: $C + C' = \{c + c' \mid c \in C, c' \in C'\}$
ist konvex.

Seien also $c, d \in C$, $c', d' \in C'$ und $t \in [0, 1]$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} & t(c + c') + (1-t)(d + d') = \\ &= (tc + tc') + ((1-t)d + (1-t)d') \\ &= \underbrace{(tc + (1-t)d)}_{\in C, \text{ da } C \text{ konvex}} + \underbrace{(tc' + (1-t)d')}_{\in C', \text{ da } C' \text{ konvex}} \in C + C' \end{aligned}$$

$\Rightarrow C + C'$ konvex

(iii) $C \subset X$ konvex, $a \in \mathbb{R}$, zu zeigen

~~ist~~ ist, dass aC konvex ist.

Seien also $c, d \in C$ und $t \in [0, 1]$, dann

$$t(ac) + (1-t)(ad) = a \underbrace{(tc + (1-t)d)}_{\in C, \text{ da } C \text{ konvex}} \in aC. \quad \square$$

Exercise 2. X VR, $Y, Z \subset X$

(3)

(i): $Y \subset \text{Conv}(Y)$, denn:

$$\text{Conv}(Y) = \bigcap_{C \in \mathcal{L}_Y} C, \text{ wobei wir definieren}$$

$$\mathcal{L}_Y := \{C \subset X \mid C \supset Y \text{ und } C \text{ konvex}\}$$

Damit gilt $Y \subset C$ für jedes $C \in \mathcal{L}_Y$ und
somit $Y \subset \text{Conv}(Y)$.

(ii): $Y \subset Z \Rightarrow \text{Conv}(Y) \subset \text{Conv}(Z)$, denn:

Sei $x \in \text{Conv}(Y)$. Dann gilt: $x \in C$ für alle
 $C \in \mathcal{L}_Y$. Da $Y \subset Z$, gilt auch $\mathcal{L}_Z \subset \mathcal{L}_Y$
(denn jede Menge aus $\mathcal{L}_Z$ ist konvex und
enthält $Y \subset Z$). Somit folgt:

$$x \in D \text{ für alle } D \in \mathcal{L}_Z$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{D \in \mathcal{L}_Z} D = \text{Conv}(Z)$$

$$\Rightarrow \text{Conv}(Y) \subset \text{Conv}(Z)$$

(iii): $\text{Conv}(\text{Conv}(Y)) \stackrel{\text{Def.}}{=} \bigcap_{C \in \mathcal{C}_{\text{Conv}(Y)}} C$, aber auch

(4)

$$\text{Conv}(Y) = \bigcap_{C \in \mathcal{C}_{\text{Conv}(Y)}} C, \text{ denn}$$

$\text{Conv}(Y) \in \mathcal{C}_{\text{Conv}(Y)}$ ($\text{Conv}(Y)$ ist konvex und $\text{Conv}(Y) \supset \text{Conv}(Y)$)

(iv): • $\text{Conv}(Y \cap Z) \subset \text{Conv}(Y) \cap \text{Conv}(Z)$, denn

$$Y \cap Z \subset Y \stackrel{(ii)}{\implies} \text{Conv}(Y \cap Z) \subset \text{Conv}(Y)$$

$$\& \quad Y \cap Z \subset Z \stackrel{(ii)}{\implies} \text{Conv}(Y \cap Z) \subset \text{Conv}(Z)$$

$$\implies \text{Conv}(Y \cap Z) \subset \text{Conv}(Y) \cap \text{Conv}(Z)$$

• Die umgekehrte Inklusion $(\text{Conv}(Y) \cap \text{Conv}(Z) \subset \text{Conv}(Y \cap Z))$ gilt im Allgemeinen nicht. Gegenbeispiel:

siehe nächste
Seite



Setze: $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{Q}$, $Z = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^c$ (5)
 $\uparrow$
rationale Zahlen

Dann gilt:

$$Y \cap Z = \emptyset \Rightarrow \text{Conv}(Y \cap Z) = \emptyset, \text{ aber}$$

$$\text{Conv}(\mathbb{Q}) \cap \text{Conv}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \text{ da}$$

$$\text{Conv}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R} \text{ und } \text{Conv}(\mathbb{Q}^c) = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{Conv}(Y \cap Z) \neq \text{Conv}(Y) \cap \text{Conv}(Z).$$

(v): $\text{Conv}(Y) \cup \text{Conv}(Z) \subset \text{Conv}(Y \cup Z)$, denn:

$$Y \subset Y \cup Z \stackrel{(ii)}{\Rightarrow} \text{Conv}(Y) \subset \text{Conv}(Y \cup Z)$$

$$\& Z \subset Y \cup Z \stackrel{(ii)}{\Rightarrow} \text{Conv}(Z) \subset \text{Conv}(Y \cup Z)$$

$$\Rightarrow \text{Conv}(Y) \cup \text{Conv}(Z) \subset \text{Conv}(Y \cup Z)$$

Die umgekehrte Inklusion „ $\text{Conv}(Y \cup Z) \subset \text{Conv}(Y) \cup \text{Conv}(Z)$ “ gilt im Allgemeinen nicht, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt:

Setze: $X = \mathbb{R}$, $Y = (-\infty, a]$ und $Z = [b, \infty)$,
wobei $a < b$. Dann sind Y und Z konvex und
es gilt: (6)

$$\text{Conv}(Y) \cup \text{Conv}(Z) \stackrel{(vi)}{=} Y \cup Z, \text{ aber}$$

$$\text{Conv}(Y \cup Z) = \mathbb{R} \neq Y \cup Z.$$

(VI): Y konvex $\Leftrightarrow \text{Conv}(Y) = Y$

" $\Rightarrow$ ": Angenommen, Y ist konvex. Dann gilt

$$Y \in \mathcal{C}_Y \text{ und somit } \text{Conv}(Y) = \bigcap_{C \in \mathcal{C}_Y} C \subset Y.$$

$Y \stackrel{(i)}{\subset} \text{Conv}(Y)$ gilt aber immer und

deshalb folgt $Y = \text{Conv}(Y)$.

" $\Leftarrow$ ": Da $\text{Conv}(Y)$ konvex ist (nach Def),
gilt auch $Y = \text{Conv}(Y)$ ist konvex.

Exercise 3.

(7)

Sei $f: X \rightarrow Y$ linear, $C \subset X$, $D \subset Y$ und $Z \subseteq X$.

(i): Zeige, dass gilt:

$$(D \text{ konvex in } Y \Rightarrow f^{-1}(D) = \{x \in X \mid f(x) \in D\})$$

konvex in X).

Seien also $x, x' \in f^{-1}(D) \Leftrightarrow f(x), f(x') \in D$.

Da $f([x, x']) = [f(x), f(x')] \subset D$, folgt

$[x, x'] \subset f^{-1}(D)$ und somit ist

$f^{-1}(D)$ konvex.

(ii): C konvex in $X \Rightarrow f(C) :=$

$\{f(x) \mid x \in C\}$ konvex in Y , denn

für jedes $t \in [0, 1]$ gilt:

$$tf(x) + (1-t)f(x') = f(\underbrace{tx + (1-t)x'}_{\in C, \text{ da } C \text{ konvex}})$$

$\in f(C)$

$\Rightarrow f(C)$ ist konvex.

(iii): C konvex in $X \Rightarrow C+Z = \{c+z \mid c \in C\}$ konvex in X/Z , denn: (8)

Die Abbildung $\pi_Z : X \rightarrow X/Z$, die durch $\pi_Z(x) = x+Z$ gegeben ist, ist nach Remark 2.5.3 im Skript linear und somit gilt nach Teil (ii), dass

$C+Z = \pi_Z(C)$ konvex in X/Z ist (Als Bild einer konv. Menge).

(iv) Zu zeigen ist:

Für $n \geq 1$ und $x_1, \dots, x_n \in X$ gilt

$$f(\text{Conv}(x_1, \dots, x_n)) = \text{Conv}(f(x_1), \dots, f(x_n))$$

$$\begin{aligned} \text{Klar, denn: } f(\text{Conv}(x_1, \dots, x_n)) &= \\ &= \left\{ f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \mid t_i \geq 0 \ \forall i=1, \dots, n, \sum_{i=1}^n t_i = 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n t_i f(x_i) \mid t_i \geq 0, \sum t_i = 1 \right\} = \text{Conv}\left(\underbrace{f(x_1), \dots, f(x_n)}\right) \end{aligned}$$

Exercise 4.

⑨

$f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ seien linear und sei $a \in \mathbb{R}$.

$$\bullet [f > a] = f^{-1}(\underbrace{(a, +\infty)}_{\text{konvex}}) = \{x \in X \mid f(x) > a\}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{konvex nach 3(ii), da } f \text{ linear und } (a, \infty) \text{ konvex}}$

$$\bullet [f \geq a] = f^{-1}(\underbrace{[a, +\infty)}_{\text{konvex}})$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{konvex nach 3(ii)}}$

$$\bullet [f = a] = f^{-1}(\underbrace{\{a\}}_{\text{konvex}}) = f^{-1}([a, a])$$

$$\bullet [f < a] = f^{-1}(\underbrace{(-\infty, a)}_{\text{konvex}})$$

$$\bullet [f \leq a] = f^{-1}(\underbrace{(-\infty, a]}_{\text{konvex}})$$

$$\bullet [f > g] = [f - g > 0] = \underbrace{(f - g)^{-1}}_{\text{lin.}}(\underbrace{(0, \infty)}_{\text{konvex}})$$

$$\bullet [f \geq g] = \underbrace{(f - g)^{-1}}_{\text{lin.}}(\underbrace{[0, \infty)}_{\text{konv.}})$$

$$\bullet [f = g] = (f - g)^{-1}(\{0\})$$

Exercise 5.

(10)

(i): Seien $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^2$ konvex und sei $x \in \text{Conv}(C_1 \cup C_2)$. Zu zeigen ist:

$$\exists 1 \leq m \leq 2, \exists y_1, \dots, y_m \in C_1 \cup C_2 \quad (x \in \text{Conv}(y_1, \dots, y_m))$$

(Dies ist der Spezialfall der Aussage in (ii) für $n=2$ und $k=2$)

Beweis:

Wir benutzen den Satz von Carathéodory (Theorem 2.8.1 aus dem Skript). Dieser liefert folgendes: $\exists 1 \leq m \leq 3 \exists y_1, \dots, y_m \in C_1 \cup C_2$, sodass $x \in \text{Conv}(y_1, \dots, y_m)$.

Falls gilt, dass $m \leq 2$, sind wir fertig und wir müssen nur noch den Fall $m=3$ betrachten:

Sei also $x \in \text{Conv}(y_1, y_2, y_3)$ für $y_1, y_2, y_3 \in C_1 \cup C_2$. Wir werden zeigen, dass x auch als Konvexkombination von zwei Elementen aus $C_1 \cup C_2$ dargestellt werden kann.

Wir machen zunächst eine Fallunterscheidung:

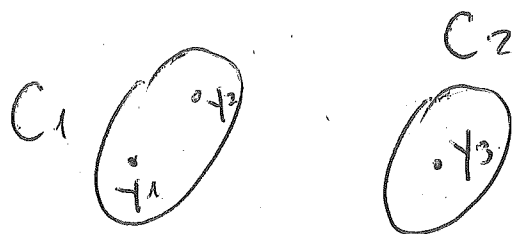
• Fall 1 : Angenommen, $y_1, y_2, y_3 \in C_1$ (oder C_2), (11)

dann gilt $x \in \text{Conv}(y_1, y_2, y_3) \xLeftrightarrow{C_i \text{ konvex}} x \in C_1$ und

somit $x \in \text{Conv}(x) = \{x\}$, $x \in C_1 \cup C_2$ und wir sind fertig.

• Fall 2 : Der nichttriviale Fall ist, dass y_1, y_2, y_3 nicht alle in der gleichen konvexen Menge liegen:

O.B.d.A. seien $y_1, y_2 \in C_1$ und $y_3 \in C_2$



$$x \in \text{Conv}(y_1, y_2, y_3) \Rightarrow \exists t_1, t_2, t_3 \geq 0 \text{ mit } t_1 + t_2 + t_3 = 1 \text{ und}$$

$$x = t_1 y_1 + t_2 y_2 + t_3 y_3$$

• Angenommen, $t_3 = 1$, dann gilt $\underbrace{t_1}_{\geq 0} + \underbrace{t_2}_{\geq 0} = 1 - t_3 = 0$

$\Rightarrow t_1 = t_2 = 0$ und somit $x = y_3$, d.h.

$x = \text{Conv}(y_3)$, $y_3 \in C_2 \subset (C_1 \cup C_2)$ und wir sind fertig.

• Sei also $t_3 \neq 1$. Dann gilt $1-t_3 \neq 0$ und (12)

$x = (1-t_3)c + t_3 y_3$, wobei wir definieren

$$c := \frac{t_1}{1-t_3} y_1 + \frac{t_2}{1-t_3} y_2.$$

Wir bemerken: $c \in \text{Conv}(y_1, y_2)$, denn:

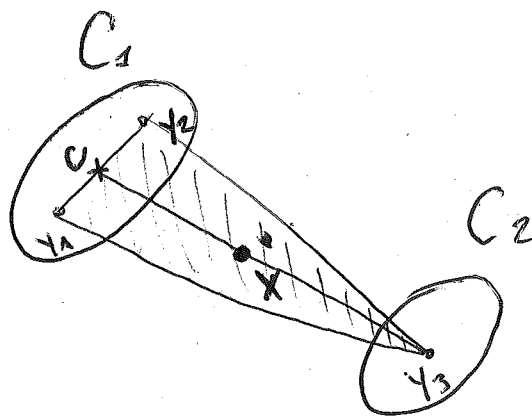
$$\frac{t_1}{1-t_3}, \frac{t_2}{1-t_3} \geq 0 \quad \text{und} \quad \underbrace{\frac{t_1}{1-t_3} + \frac{t_2}{1-t_3}}_{= \frac{t_1+t_2}{1-t_3} = \frac{1-t_3}{1-t_3}} = 1$$

Somit haben wir es geschafft, x als Konvexkombination von nur zwei El. aus $C_1 \cup C_2$ darzustellen:

$$x \in \text{Conv}(c, y_3),$$

$$c, y_3 \in C_1 \cup C_2$$

und der Beweis ist abgeschlossen. $\square$



(ii): Sei $k \leq n$ und seien $C_1, \dots, C_k \subset \mathbb{R}^n$ konvex (13)
(für $n \geq 1$). Für jedes $x \in \text{Conv}(\bigcup_{i=1}^k C_i)$ gibt es
ein $m \leq k$ und $y_1, \dots, y_m \in \bigcup_{i=1}^k C_i$, sodass
 $x \in \text{Conv}(y_1, \dots, y_m)$.

Beweis: Wir folgen der Strategie aus dem
Tipp (Hint) zu Korollar 2.8.2. aus dem Skript.

Nach Carathéodory (Thm. 2.8.1) gibt es
ein $m \leq n+1$ und $y_1, \dots, y_m \in \bigcup_{i=1}^k C_i$, sodass
 $x \in \text{Conv}(y_1, \dots, y_m)$. Im Fall $m \leq k$ sind
wir damit fertig.

Wir nehmen also an, es gilt $m \geq k+1$,
d.h.

$$(*) : x = t_1 y_1 + \dots + t_k y_k + t_{k+1} y_{k+1} + \dots + t_m y_m$$

Wie in Teil (i), finden wir eine Konvex-
kombination aus $m-1$ Elementen von $\bigcup_{i=1}^k C_i$,
die x darstellt (vgl. auch mit dem



Beweis des Satzes von Carathéodory:

(14)

Da $m \geq k+1$, müssen zwei der y_i 's in der gleichen konvexen Menge C_j liegen. O.B.d.A. nehmen wir an:

$$y_1, y_2 \in C_1.$$

Falls t_1 oder t_2 gleich 0 ist, so sind wir fertig. Wir nehmen also an $t_1, t_2 \neq 0$ und somit

$$\sum_{i=3}^m t_i \neq 1 \Rightarrow 1 - \sum_{i=3}^m t_i \neq 0 \text{ und wir}$$

können (*) folgendermaßen umschreiben:

$$x = \left(1 - \sum_{i=3}^m t_i\right) \cdot \underbrace{\left(\frac{t_1}{1 - \sum_{i=3}^m t_i} \cdot y_1 + \frac{t_2}{1 - \sum_{i=3}^m t_i} \cdot y_2\right)}_{=: c} + \sum_{i=3}^m t_i y_i.$$

Wie in (i) folgt $c \in \text{Conv}(y_1, y_2)$, denn

$$\frac{t_1}{1 - \sum_{i=3}^m t_i} + \frac{t_2}{1 - \sum_{i=3}^m t_i} = \frac{t_1 + t_2}{1 - \sum_{i=3}^m t_i} = \frac{1 - \sum_{i=3}^m t_i}{1 - \sum_{i=3}^m t_i} = 1$$

$$\& \frac{t_1}{1 - \sum t_i}, \frac{t_2}{1 - \sum t_i} \geq 0,$$

G

$\Rightarrow x \in \text{Conv}(\underbrace{C_1}_{C_1}, y_2, \dots, y_m)$, d.h. wir können (15)

x als Konvexkomb. von $m-1$ El. aus $\bigcup_{i=1}^k C_i$ schreiben.

Nun kann man dieses Argument wiederholt verwenden, bis man eine Darstellung für x als Konvexkomb. von k Elementen aus $\bigcup_{i=1}^k C_i$ erhält. $\square$