

Exercise 1.

(i) Setze $X := \emptyset$. Es gibt nur eine Funktion auf $\emptyset$ und somit besteht $\mathcal{E}X$ aus genau einem Element.

Das heißt aber wiederum, dass $B(\mathcal{E}X)$ aus einem Element besteht, also $\mathcal{E}(\mathcal{E}X)$ ist $\mathcal{E}(\mathcal{E}X)$ ein eindimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ und somit isomorph zu $\mathbb{R}$.

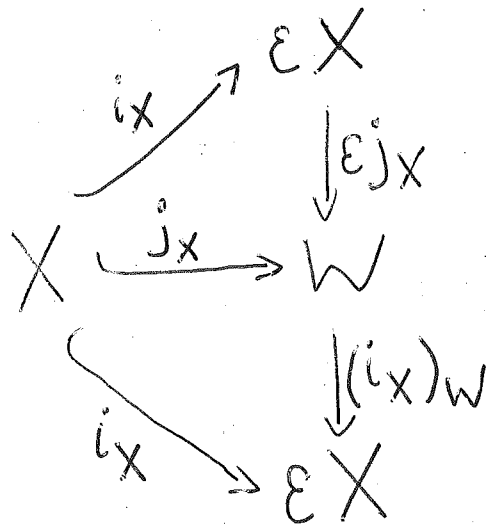
$$\Rightarrow \mathcal{E}X \neq \mathcal{E}(\mathcal{E}X)$$

(ii) Es gibt eine eindeutig bestimmte lin.

Abbildung $\pi_X: \mathcal{E}X \rightarrow X$, sodass das gegebene Diagramm kommutiert; dies folgt direkt aus der universellen Eigenschaft der freien Vektorräume (siehe Skript und setze $h := \text{id}_X$ und $Y := X$). $\square$

Exercise 2.

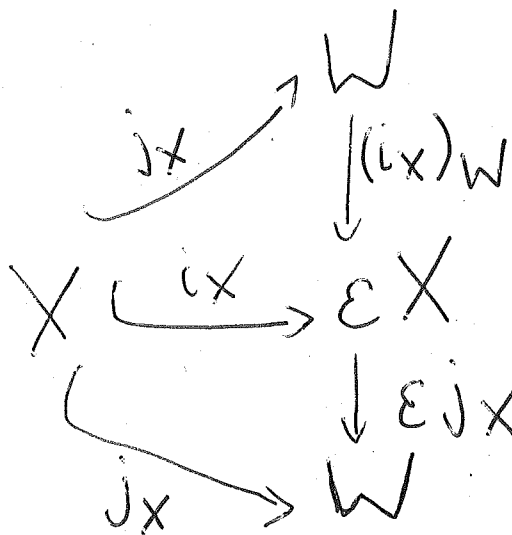
Da sowohl εX als auch W die universelle Eigenschaft erfüllen, kommutieren die folgenden Diagramme:



, d.h., insbesondere gilt

$$(*) : (i_X)_W \circ \varepsilon j_X = \text{id}_{\varepsilon X}$$

und



, d.h., insbesondere gilt

$$(**) : \varepsilon j_X \circ (i_X)_W = \text{id}_W,$$

wobei $(i_X)_W$ und εj_X linear sind und somit folgt aus (*) und (**): $\varepsilon X \cong W$.

□

Exercise 3.

Wir wollen zeigen, dass $E = (E_0, E_1) : \text{Set} \rightarrow \text{Lin}$ ein kovarianter Funktor ist, wobei: (3)

$$E_0(X) := \varepsilon X$$

$$E_1(X \xrightarrow{h} Y) = \varepsilon X \xrightarrow{eh} \varepsilon Y$$

Bemerkung:

$$i_X(x) = f_x \text{ \&}$$

$$\pi_X(f_x) = x, \text{ da}$$

$$\pi_X \circ i_X = \text{id}_X$$

Wir definieren die Abbildung eh durch

$$(eh)(f_x) = f_{h(x)} \quad (\text{die Funktion } f_{h(x)} \text{ ist}$$

$$\text{geg. durch } f_{h(x)}(y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } h(x) = y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases})$$

Somit gilt: Sei $f \in \varepsilon X$, $f = \sum_{i=1}^n f(x_i) f_{x_i}$, dann

$$eh(f) = eh\left(\sum_{i=1}^n f(x_i) f_{x_i}\right) = \sum_{i=1}^n f(x_i) f_{h(x_i)}$$

(i): Die oben definierte Abbildung eh ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung, für die das gegebene Diagramm kommutiert, denn

$$\begin{aligned} (eh \circ i_X)(x) &= eh(i_X(x)) = eh(\underbrace{f_x}_{=f_x}) = f_{h(x)} \\ &= i_Y(h(x)) \end{aligned}$$

$$\text{(ii)} : [\varepsilon(g \circ h)](f_x) = f_{(g \circ h)(x)} = f_{g(h(x))}$$

$$(\varepsilon g \circ eh)(f_x) = \varepsilon g(eh(f_x)) = \varepsilon g(f_{h(x)}) = f_{g(h(x))}$$

(iii): Wir haben bereits gezeigt (in (ii)), dass E_1 die ④ Komposition von Pfeilen (Abbildungen) respektiert.

Um zu zeigen, dass E ein kov. Funktor ist, bleibt also nur noch zu zeigen:

$$E_1(\text{id}_X) = \text{id}_{EX} \quad (\Leftrightarrow E \cdot \text{id}_X = \text{id}_{EX}).$$

Das gilt, da

$$\forall x \in X: (E \text{id}_X)(f_x) = f(\text{id}_X(x)) = f_x = \text{id}_{EX}(f_x),$$

d.h. $E \text{id}_X = \text{id}_{EX}$ auf $B(X)$ und damit auch auf ganz EX (da $B(X)$ Basis von EX ist).

zu Teil (ii): Wir haben gezeigt, dass $E(g \circ h) = E g \circ E h$ auf $B(X)$. Da $B(X)$

eine Basis von EX ist, gilt auch

$$[E(g \circ h)](f) = [E g \circ E h](f) \quad \forall f \in EX.$$

Exercise 4.

(5)

Wir zeigen zuerst die Implikation

$$\pi_Y \circ \varepsilon h = h \circ \pi_X \Rightarrow h \text{ ist linear.}$$

Beobachtung: $\pi_Y, \varepsilon h$ sind linear

$\Rightarrow \pi_Y \circ \varepsilon h$ ist als Komposition lin. Abb. auch linear.

Daher gilt: Seien $x, x' \in X$, dann

$$\begin{aligned} \bullet \underbrace{(\pi_Y \circ \varepsilon h)(f_x + f_{x'})}_{\text{Ann.}} &\stackrel{\text{lin.}}{=} \underbrace{(\pi_Y \circ \varepsilon h)(f_x) + (\pi_Y \circ \varepsilon h)(f_{x'})}_{\parallel} \\ &\parallel \\ &(h \circ \pi_X)(f_x + f_{x'}) \qquad (h \circ \pi_X)(f_x) + (h \circ \pi_X)(f_{x'}) \\ &\parallel \qquad \qquad \qquad \parallel \\ &h(\pi_X(f_x + f_{x'})) \qquad h(\underbrace{\pi_X(f_x)}_{=x}) + h(\underbrace{\pi_X(f_{x'})}_{=x'}) \\ &\stackrel{\pi_X \text{ lin.}}{\parallel} \qquad \qquad \qquad \parallel \\ &h(\underbrace{\pi_X(f_x)}_{=x} + \underbrace{\pi_X(f_{x'})}_{=x'}) \qquad h(x) + h(x') \\ &\parallel \\ &h(x + x') \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h(x + x') = h(x) + h(x')$$

• Analog zeigt man für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda h(x) \stackrel{\text{Ann.}}{=} \lambda (\pi_Y \circ \varepsilon h)(f_x) \stackrel{\text{lin.}}{=} (\pi_Y \circ \varepsilon h)(\lambda f_x) = h(\lambda x).$$

Für die umgekehrte Implikation, nehmen wir an, dass h linear ist. Zu zeigen ist: $\pi_Y \circ \varepsilon h = h \circ \pi_X$. (6)

Für jedes $x \in X$ gilt:

$$\begin{aligned} \bullet (\pi_Y \circ \varepsilon h)(f_x) &= \pi_Y(\varepsilon h(f_x)) = \pi_Y(f_{h(x)}) \\ &= h(x) \quad (\text{da } \pi_Y \circ i_Y = \text{id}_Y) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \bullet (h \circ \pi_X)(f_x) &= h(\underbrace{\pi_X(f_x)}_{= \pi_X \circ i_X = \text{id}_X}) = h(x) \\ &= \pi_X \circ i_X = \text{id}_X \end{aligned}$$

Wir haben also $\pi_Y \circ \varepsilon h = h \circ \pi_X$ auf $B(x)$ gezeigt. Da $B(x)$ Basis von εX ist gilt dann

auch $\pi_Y \circ \varepsilon h = h \circ \pi_X$ auf ganz $\varepsilon X = \langle B(x) \rangle$

Exercise 5

(7)

(i) Wir zeigen $\langle N(X) \rangle \subseteq \text{Ker}(\pi_X)$.

- Da $\text{Ker}(\pi_X)$ ein Unterraum von EX ist, reicht es zu zeigen, dass $N(X) \subseteq \text{Ker}(\pi_X)$ (da nach Definition $\langle N(X) \rangle$ der kleinste Unterraum ist, der $N(X)$ enthält).

- $N(X) \subseteq \text{Ker}(\pi_X)$.

Sei $f \in N(X)$. Dann $\exists x, y \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$f = f_{\lambda x + \mu y} - \lambda f_x - \mu f_y$. Wir zeigen, dass

$f \in \text{Ker}(\pi_X)$ folgt, d.h. $\pi_X(f) = 0$:

$$\pi_X(f_{\lambda x + \mu y} - \lambda f_x - \mu f_y)$$

$$\stackrel{\text{lin.}}{=} \pi_X(f_{\lambda x + \mu y}) - \lambda \pi_X(f_x) - \mu \pi_X(f_y)$$

$$\stackrel{\pi \circ i = \text{id}}{=} \lambda x + \mu y - \lambda x - \mu y = 0.$$

(ii): Zeige zuerst: $f_0 \in N(X)$

(8)

$$f_0 = f_{(-1)0+10} - (-1) \cdot f_0 + 1 \cdot f_0 \in N(X)$$

(mit $x=y=0$, $\lambda=-1$ und $\mu=1$).

Sei nun $f = f(x_1)f_{x_1}$ für ein $x_1 \in X$ und sei $f \in \text{Ker}(\pi_X)$. Dann gilt:

$$\pi_X(f) = f(x_1)\pi_X(f_{x_1}) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{f(x_1)}_{\neq 0} x_1 = 0$$

$\Rightarrow x_1 = 0$ und somit $f_{x_1} = f_0$, sodass

$$f = \underbrace{f(0)}_{\in N(X)} f_0 \in \langle N(X) \rangle$$

(iii): $n=2$: Sei $f = f(x_1)f_{x_1} + f(x_2)f_{x_2}$ für

$x_1, x_2 \in X$ und sei $f \in \text{Ker}(\pi_X)$, d.h.

$$\pi(f) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{f(x_1)}_{\neq 0} x_1 + \underbrace{f(x_2)}_{\neq 0} x_2 = 0$$

$$\Rightarrow f_{f(x_1)x_1 + f(x_2)x_2} = f_0 \in N(X)$$

Daher wollen wir definieren:

$$g_1 := f_0 - f(x_1)f_{x_1} - f(x_2)f_{x_2}$$

(9)

$$= f_{f(x_1)x_1 + f(x_2)x_2} - f(x_1)f_{x_1} - f(x_2)f_{x_2} \in N(X)$$

und $g_2 = f_0 \in N(X)$

$$\Rightarrow f = g_2 - g_1 \in \langle N(X) \rangle \text{ (da } f \text{ eine Linear-}$$

$$\text{" } f(x_1)f_{x_1} - f(x_2)f_{x_2}$$

Kombination von Elementen aus $N(X)$ ist).

(iv) : $n=3$:

$$\text{Sei } f = f(x_1)f_{x_1} + f(x_2)f_{x_2} + f(x_3)f_{x_3} \text{ f\"ur}$$

$x_1, x_2, x_3 \in X$ und sei $f \in \text{Ker}(\pi_X)$, d.h.

$$\underbrace{f(x_1)}_{\neq 0} x_1 + \underbrace{f(x_2)}_{\neq 0} x_2 + \underbrace{f(x_3)}_{\neq 0} x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{f(x_2)}{f(x_1)} x_2 - \frac{f(x_3)}{f(x_1)} x_3$$

Definiere:

$$g := f \left(-\frac{f(x_2)}{f(x_1)} x_2 - \frac{f(x_3)}{f(x_1)} x_3 \right) + \frac{f(x_2)}{f(x_1)} f_{x_2} + \frac{f(x_3)}{f(x_1)} f_{x_3} \in N(X)$$

(5)

Es gilt:

$$g = f_{x_1} + \frac{f(x_2)}{f(x_1)} f_{x_2} + \frac{f(x_3)}{f(x_1)} f_{x_3} \in N(X)$$

und somit

$$f = f(x_1) \cdot g \in \langle N(X) \rangle$$

(V): $n=4$:

$$\text{Sei } f = f(x_1)f_{x_1} + f(x_2)f_{x_2} + f(x_3)f_{x_3} + f(x_4)f_{x_4} \in$$

$$\text{Ker}(\pi_X), \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$$

$$\Rightarrow f(x_1)x_1 + f(x_2)x_2 + f(x_3)x_3 + f(x_4)x_4 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 + \frac{f(x_2)}{f(x_1)} x_2 = -\frac{f(x_3)}{f(x_1)} x_3 - \frac{f(x_4)}{f(x_1)} x_4$$

Def.:

$$g_1 := \underbrace{\left(f - \frac{f(x_2)}{f(x_1)} x_2 - \frac{f(x_4)}{f(x_1)} x_4 \right)}_{= f_{x_1}} + \frac{f(x_3)}{f(x_1)} f_{x_3} + \frac{f(x_4)}{f(x_1)} f_{x_4}$$

$\in N(X)$

und $g_2 := f_{x_1} + \frac{f(x_2)}{f(x_1)} x_2 - f_{x_1} - \frac{f(x_2)}{f(x_1)} f_{x_2} \in N(X)$

$$\Rightarrow f = (g_1 - g_2) f(x_1) \in \langle N(X) \rangle$$