

Mathematics for
Physicists II

①

Blatt 5 - Lösungen

Exercise 1

(i) $\int : C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$ ist linear
 $f \mapsto \int f$

$$\begin{aligned} \bullet [\int (f+g)](x) &= \int_0^x f+g(t) dt = \int_0^x (f(t)+g(t)) dt \\ &= \int_0^x f(t) dt + \int_0^x g(t) dt = [\int f](x) + [\int g](x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet [a(\int f)](x) &= a \cdot \int_0^x f(t) dt = \int_0^x a f(t) dt \\ &= \int_0^x (af)(t) dt = [\int (af)](x) \end{aligned}$$

(ii) Wir zeigen, dass $\int$ injektiv ist, indem
wir $\text{Ker}(\int) = \{0\}$ beweisen



$$(Sf)(x) = 0 \Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt = 0$$

②

$$\Rightarrow \left(\int_0^x f(t) dt \right)' = 0$$

Hauptsatz der
 $\Leftrightarrow$
 Int.- und Diff. rechnung

$$f(x) = 0$$

Somit gilt:

$$f \in \text{Ker}(S) \Leftrightarrow (Sf)_x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f = \underset{C(\mathbb{R})}{0}, \text{ d.h.}$$

$$\text{Ker}(S) = \{0\}$$

$$(iii) \cdot \text{Im}(f) \subseteq C^1(\mathbb{R}) = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid$$

$f \text{ ist differenzierbar und } f' \text{ ist stetig} \}$:

$$(Sf)'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^x f(t) dt \right) (x) = f(x) \in C(\mathbb{R}),$$

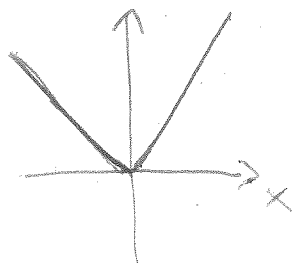
d.h. $(Sf)'$ existiert und ist stetig (nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).

• Des weiteren gilt

(3)

~~$C_1(\mathbb{R}) \neq C(\mathbb{R})$~~ $C_1(\mathbb{R}) \neq C(\mathbb{R})$, denn sei f definiert durch:

$f(x) = |x|$. Dann ist f zwar stetig, aber nicht differenzierbar in $x=0$.



• Es gilt auch $\text{Im}(f) \neq C_1(\mathbb{R})$. Wir zeigen, dass die konstante Funktion 1 (welche offensichtlich in $C_1(\mathbb{R})$ liegt) nicht in $\text{Im}(f)$ liegt:

Angenommen, $\exists f \in C(\mathbb{R})$, sodass $Sf = 1$.

$$Sf = 1 \Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left(\int_0^x f(t) dt \right)' = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \swarrow \quad \int_0^x 0 dt = 0 \neq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\stackrel{||}{=} (1)'$$

$$\stackrel{||}{=} 0$$

□

The factor space X/L is the set of all equivalence classes $(x, y) + L$, hence, according to the above geometrical interpretation of $(x, y) + L$, it is the set of all lines parallel to L . Each such line is determined from the point of its intersection with the axis $y'y$, which is a real number $a_{(x,y)+L}$, where

$$\frac{y - a_{(x,y)+L}}{x - 0} = a \Leftrightarrow a_{(x,y)+L} = y - ax.$$

It is easy to see that the addition $[(x, y) + L] + [(u, w) + L]$ on X/L corresponds to the addition $a_{(x,y)+L} + a_{(u,w)+L}$ and the scalar multiplication $b \cdot [(x, y) + L]$ on X/L corresponds to the multiplication $ba_{(x,y)+L}$ of reals. In other words, the mapping

$$e : X/L \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(x, y) + L \mapsto a_{(x,y)+L},$$

is linear, and it is also a bijection. Hence, even without carrying out the exact calculations, it is geometrically expected that X/L is linearly isomorphic to $\mathbb{R}$. In this case, we also have that

$$\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(L) + \dim(\mathbb{R}^2/L).$$

DEFINITION 2.5.5. Let X be a linear space, $Y \preceq X$ and $x_1, \dots, x_n \in X$. We say that $x_1, \dots, x_n$ are *linearly dependent (mod Y)*, if $x_1 + Y, \dots, x_n + Y$ are linearly dependent in X/Y .

One can show that $x_1, \dots, x_n$ are linearly dependent (mod Y) if and only if there are $n \geq 1$ and $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ such that $a_i \neq 0$, for some $i \in \{1, \dots, n\}$, and

$$\exists y \in Y \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i = y \right).$$

By definition, $x_1 + Y, \dots, x_n + Y$ are linearly dependent in X/Y , if there are $n \geq 1$ and $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ such that $a_i \neq 0$, for some $i \in \{1, \dots, n\}$, and

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i (x_i + Y) = 0 & \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (a_i x_i + Y) = 0 \\ & \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right) + Y = 0 \\ & \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right) + Y = Y \\ & \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i x_i \in Y \\ & \Leftrightarrow \exists y \in Y \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i = y \right). \end{aligned}$$

3(1)

Exercise 3 (ii)

④

$$a \in \mathbb{R}, e: \mathbb{R}^2/L \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) + L \mapsto y - ax. \text{ Zu zeigen ist:}$$

e ist ein linearer Isomorphismus.

1) e ist injektiv: Seien $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$

und $e((x, y) + L) = e((x', y') + L)$. Wir zeigen

$$(x, y) + L = \cancel{(x', y')} + L. \quad \bullet \text{ Beobachtung:}$$

$$(x, y) + L = (x', y') + L \Leftrightarrow (x - x', y - y') \in L$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \text{L} = \{(x, y) \mid y = ax\} \\ a(x - x') = y - y' \end{matrix} \Leftrightarrow a = \frac{y - y'}{x - x'}$$

• Die Annahme $e((x, y) + L) = e((x', y') + L)$
kann umgeschrieben werden (nach Def. von e) als:

$$(e((x, y) + L) =) y - ax = y' - ax' (= e((x', y') + L))$$

$$\Rightarrow a = \frac{y - y'}{x - x'} \quad \xLeftrightarrow \text{Beob.} \quad (x, y) + L = (x', y') + L$$

$\Rightarrow e$ ist injektiv.

2) e ist surjektiv. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir zeigen:
 $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 (e((x, y) + L) = \lambda)$ (5)

Setze $x := 1$ und $y := \lambda + a$.
($\Leftrightarrow y - a = \lambda$).

Dann gilt

$$(1, \lambda + a) + L \xrightarrow{e} \underbrace{(\lambda + a)}_{=y} - a \cdot \underbrace{1}_{=x} = \lambda,$$

d.h. $e((1, \lambda + a) + L) = \lambda$ und somit
ist e surjektiv.

3) Zu zeigen bleibt nur noch die Linearität:
Seien $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$, dann:

$$\begin{aligned} & \bullet e((x, y) + L + (x', y') + L) = \\ &= e((x + x', y + y') + L) = (y + y') - a(x + x') \\ &= (y - ax) + (y' - ax') = e((x, y) + L) + e((x', y') + L) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet e(\lambda(x, y) + L) = e((\lambda x, \lambda y) + L) \\ &= \lambda y - a(\lambda x) = \lambda(y - ax) = \lambda e((x, y) + L). \end{aligned}$$

□

Exercise 4

Sei X ein Vektorraum und $Z \subseteq Y \subseteq X$,
dann gilt $(X/Z)/(Y/Z) \cong X/Y$.

Definiere: $f: X/Z \rightarrow X/Y$, $x+Z \mapsto x+Y$
(d.h. $f(x+Z) = x+Y$).

Wir zeigen, dass f linear ist und wenden dann
Theorem 2.5.7 aus dem Skript an:

• f linear: Seien $x, x' \in X$ und $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\text{Es gilt: } f((x+Z) + (x'+Z)) &= f((x+x') + Z) \\ &= (x+x') + Y = (x+Y) + (x'+Y) \\ &= f(x+Z) + f(x'+Z) \quad \&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(a(x+Z)) &= f(ax+Z) = ax+Y \\ &= a \cdot (x+Y) = a \cdot f(x+Z)\end{aligned}$$

• $\text{Im}(f) = X/Y$ nach Definition, d.h.
 f ist surjektiv

$$\begin{aligned}\text{• } \text{Ker}(f) &= \{x+Z \mid x+Y = Y\} = \\ &= \{x+Z \mid x \in Y\} = Y/Z \quad \text{und es gilt} \\ &Y/Z \subseteq X/Z.\end{aligned}$$

Wir können nun Theorem 2.5.7 benutzen
und erhalten

$$(X/Z)/\text{Ker}(f) \cong \text{Im}(f)$$

$$\Leftrightarrow (X/Z)/(Y/Z) \cong X/Y$$

Exercise 5

X Vektorraum mit $\dim(X) = n > 1$, $Y \leq X$ mit

$$\dim(Y) = n-1$$

Definiere Äquivalenzrelation (zu zeigen!) auf $X \setminus Y$

durch $x \sim x' \Leftrightarrow [x, x'] \cap Y = \emptyset$, wobei

$$[x, x'] = \{t \cdot x + (1-t) \cdot x' \mid t \in [0, 1]\}$$

Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von Y und

$\{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n\}$ eine Basis von X .

Für jedes $x \in X \setminus Y$ gilt dann: $\exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$$x = \underbrace{a_1 v_1 + \dots + a_{n-1} v_{n-1}}_{:= y \in Y} + \underbrace{a_n v_n}_{\in X \setminus Y}, \text{ wobei}$$

$a_n \neq 0$ (Sonst würde $x = y \in Y$ gelten $\downarrow$)

Wir zeigen nun:

Behauptung: $x \sim x' \Leftrightarrow a_n a'_n > 0$

($\Leftrightarrow a_n, a'_n$ haben die selben Vorzeichen)

Beweis der Behauptung

" $\Rightarrow$ ": Sei $z \in [x, x']$. Dann existiert ein $t \in [0, 1]$, sodass gilt:

$z = tx + (1-t)x'$ und somit $\exists y, y' \in Y$:

$$\begin{aligned} z &= t(y + a_n v_n) + (1-t)(y' + a'_n v_n) \\ &= \underbrace{[ty + (1-t)y']}_{\in [Y, Y'] \subset Y} + \underbrace{[ta_n + (1-t)a'_n]}_{\in \mathbb{R}} v_n \end{aligned}$$

Angenommen, $\exists z \in [x, x']$, sodass $z \in Y$. Dann gilt

$\exists t \in [0, 1] \ (ta_n + (1-t)a'_n = 0)$. Tatsächlich gilt für dieses t sogar $t \in (0, 1)$, da $z \neq x, x'$ ($x, x' \notin Y$ nach Annahme).

Somit gilt

$$\exists z \in Y \ (z \in [x, x']) \Rightarrow \exists t \in (0, 1) \ ($$

$$ta_n = (t-1)a'_n) \Rightarrow a_n = \left(\frac{t-1}{t}\right)a'_n$$

Dies impliziert $a_n a'_n < 0$, denn

$$a_n a'_n = \underbrace{\left(\frac{t-1}{t} a'_n\right)}_{< 0} \underbrace{a'_n}_{> 0} = \underbrace{\left(\frac{t-1}{t}\right)}_{< 0} \underbrace{a_n'^2}_{> 0} < 0$$

Um die umgekehrte Implikation (" $\Leftarrow$ ") zu zeigen, nehmen wir an, dass für $x, x' \in X \setminus Y$ mit

$$x = y + a_n v_n \quad \text{und}$$

$$x' = y' + a'_n v_n \quad \text{das folgende gilt:}$$

$$a_n a'_n < 0 \quad (\text{z.B. } a_n > 0, a'_n < 0 \text{ o.B.d.A.})$$

Wir zeigen $\exists t \in (0, 1)$, sodass $z := t a_n + (1-t) a'_n = 0$.

Setze $t := \frac{a'_n}{a'_n - a_n}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} t a_n &= \frac{a'_n a_n}{a'_n - a_n} \quad \text{und} \quad (t-1) a'_n = \frac{a'_n a'_n}{a'_n - a_n} - a'_n \\ &= \frac{a'_n a'_n}{a'_n - a_n} - \frac{a'_n (a'_n - a_n)}{a'_n - a_n} \\ &= \frac{a'_n a_n}{a'_n - a_n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t a_n = (t-1) a'_n$$

$$\Leftrightarrow t a_n + (1-t) a'_n = 0. \quad \text{Des Weiteren gilt}$$

$$t = \frac{a'_n}{a'_n - a_n} \in (0, 1), \text{ denn } t = \frac{-|a'_n|}{-(|a'_n| + |a_n|)} \in (0, 1).$$

$$\Rightarrow \exists z \in [x, x'], \text{ sodass } z \in Y.$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass $\sim$ tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist; die Tatsache, dass es zwei Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$ gibt, folgt dann aus der gerade bewiesenen Behauptung.

• $\sim$ ist reflexiv: $x \sim x \quad \forall x \in X \setminus Y$, denn
 $[x, x] = x$ und somit $[x, x] \cap Y = x \cap Y = \emptyset$,
~~da~~ da $x \notin Y$.

• $\sim$ ist symmetrisch: $x \sim x' \Rightarrow x' \sim x$
 $\forall x, x' \in X \setminus Y$, denn

$$[x', x] = \left\{ \underbrace{t}_{=1-s} x' + \underbrace{(1-t)}_{=s} x \mid t \in [0, 1] \right\}$$

$$= \left\{ s x + (1-s) x' \mid s \in [0, 1] \right\}$$

$$= [x, x'] \quad \text{und somit}$$

$$[x, x'] \cap Y = \emptyset \Leftrightarrow [x', x] \cap Y = \emptyset.$$

• $\sim$ ist transitiv: $x \sim x' \ \& \ x' \sim x'' \Rightarrow x \sim x''$
 $\forall x, x', x'' \in X \setminus Y$.

Zu zeigen ist also:

Angenommen: $[x, x'] \cap Y = \emptyset$ & $[x', x''] \cap Y = \emptyset$

Dann gilt $[x, x''] \cap Y = \emptyset$. Wir nutzen

die gerade bewiesene Äquivalenz: Seien $x = y + a_n v_n$

$$x' = y' + a_n' v_n$$

$$x'' = y'' + a_n'' v_n$$

$$[x, x'] \cap Y = \emptyset \Leftrightarrow a_n a_n' > 0$$

$$\& [x', x''] \cap Y = \emptyset \Leftrightarrow a_n' a_n'' > 0$$

$$(a_n \neq 0, a_n' \neq 0, \\ a_n'' \neq 0)$$

Wir zeigen:

Es gilt $a_n a_n'' > 0 \Leftrightarrow [x, x''] \cap Y = \emptyset$.

$$a_n a_n'' = a_n \cdot \frac{a_n'}{a_n'} \cdot \frac{a_n'}{a_n'} \cdot a_n''$$

$$= \underbrace{\frac{1}{a_n'^2}}_{>0} \underbrace{(a_n \cdot a_n')}_{>0} \underbrace{(a_n' a_n'')}_{>0} > 0.$$