

Blatt 4 - LösungenExercise 1

X, Y, Z Vektorräume, $f \in \mathcal{L}(X, Y)$, $g \in \mathcal{L}(Y, Z)$

(i) $g \circ f \in \mathcal{L}(X, Z)$:

Seien $x_1, x_2 \in X$, $a \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\bullet g(f(x_1 + x_2)) \stackrel{f}{=} g(f(x_1) + f(x_2)) \stackrel{g}{=} g(f(x_1)) + g(f(x_2))$$

$$g(f(x_2)) = g \circ f(x_1) + g \circ f(x_2) \quad \checkmark$$

$$\bullet g(f(ax_1)) \stackrel{f}{=} g(af(x_1)) \stackrel{g}{=} a g(f(x_1)) =$$

$$= a \cdot g \circ f(x_1) \quad \checkmark$$

(ii) $\text{id}_X \in \mathcal{L}(X)$

$$\bullet \text{id}_X(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 = \text{id}_X(x_1) + \text{id}_X(x_2) \quad \checkmark$$

$$\bullet \text{id}_X(ax_1) = ax_1 = a \cdot \text{id}_X(x_1) \quad \checkmark$$

(iii) Konstante Funktion $\bar{0}: X \rightarrow Y, x \mapsto 0$
ist linear:

$$\bullet \bar{0}(x_1 + x_2) = 0 = 0 + 0 = \bar{0}(x_1) + \bar{0}(x_2) \quad \checkmark$$

$$\bullet \bar{0}(ax_1) = 0 = a \cdot 0 = a \cdot \bar{0}(x_1) \quad \checkmark$$

(iv) $f(0) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{L}(X, Y)$, denn

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

(v) Sei $x \in X$, dann gilt

$$f(-x) = -f(x).$$

(2)

Klar, denn $f(-x) = f(-1 \cdot x) = -1 f(x) = -f(x)$.

(vi) Seien $n \geq 1$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $x_1, \dots, x_n \in X$, dann gilt

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$$

Beweis durch Induktion:

$n=1$: $f(a_1 x_1) = a_1 f(x_1)$ nach Def.
Induktionsanfang $\forall a_1 \in \mathbb{R} \forall x_1 \in X$

$n \rightarrow n+1$: Angenommen, es gilt
Induktionsschritt

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, x_1, \dots, x_n \in X : f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i).$$

$$\text{Dann gilt : } f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \alpha_{n+1} x_{n+1}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1})$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}, x_1, \dots, x_{n+1} \in X$, denn

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i\right) &= f\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i}_{\in X} + \underbrace{\alpha_{n+1} x_{n+1}}_{\in X}\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) + f(\alpha_{n+1} x_{n+1}) \end{aligned}$$

Annahme

$$= f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)\right) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x_i).$$

(vii)

③

$$f(x) = f(y) \Rightarrow f(x-y) = 0 \Leftrightarrow x-y \in \text{Ker}(f)$$

Woraus folgt D.h.,

$$\text{Ker}(f) = \{0\} \Rightarrow f \text{ injektiv.}$$

Wir zeigen, dass die in der Aufgabenstellung beschriebene Eigenschaft $\text{Ker}(f) = \{0\}$ impliziert.

Sei $x \neq 0$, dann ist $\{x\}$ lin. unabh. und nach Annahme gilt dann $\{f(x)\}$ ist lin. unabh.
 $\Rightarrow \{f(x)\} \neq 0$.

$$\text{D.h.} \quad x \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (f(x) = 0 \rightarrow x = 0.)$$

$$\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0\}.$$

$$\Rightarrow f \text{ injektiv.}$$

(viii) $\text{Ker}(f) \neq X$, denn

$$1) \quad x_1, x_2 \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) = 0$$

$$\Rightarrow f(x_1) + f(x_2) = 0 + 0 = 0$$

$$\stackrel{\text{lin.}}{\Rightarrow} f(x_1 + x_2) = 0 \Leftrightarrow \text{Ker}(f) \ni x_1 + x_2$$

$$2) \quad 0 \in \text{Ker}(f), \text{ da } f(0) = 0 \quad \forall f \text{ linear}$$

$$3) x_1 \in \text{Ker}(f), a \in \mathbb{R}$$

(4)

$$\Rightarrow af(x_1) = a \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow f(ax_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax_1 \in \text{Ker}(f)$$

$$\xrightarrow{1,2,3} \text{Ker}(f) \leq X$$

$$\bullet \text{Im}(f) \leq Y, \text{ da:}$$

$$1) y \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow \exists x \in X (f(x) = y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} f(ax) = ay \text{ für } x \in f^{-1}(y) \Rightarrow ay \in \text{Im}(f)$$

$$2) 0 \in \text{Im}(f), \text{ da } f(0) = 0.$$

$$3) y_1 + y_2 \in \text{Im}(f), \text{ falls } y_1, y_2 \in \text{Im}(f), \text{ denn:}$$

$$\text{Sei } x_1 \in f^{-1}(y_1), x_2 \in f^{-1}(y_2), \text{ dann gilt}$$

$$y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in \text{Im}(f)$$

$$\xrightarrow{1,2,3} \text{Im}(f) \leq Y$$

$$\bullet \text{Bleibt zu zeigen: } (\text{Ker}(f) = \{0\})$$

$$\Leftrightarrow f \text{ injektiv})$$

$\text{Ker}(f) = \{0\} \Rightarrow f$ injektiv haben wir bereits in (vi) gezeigt. Wir zeigen nun: f injektiv $\Rightarrow \text{Ker}(f) = \{0\}$.

Sei also f injektiv und sei $x \in \text{Ker}(f)$.

⑤

Dann gilt $f(-x) = -f(x) = -0 = 0$ und,

da f injektiv ist, $f(-x) = f(x) \Rightarrow -x = x$.

Also gilt $-x = x$ und damit $x = 0$.

Exercise 2

⑥

(i) $X \times Y$ ist ein Vektorraum

Man kann die Vektorraumaxiome (LS_1 bis LS_4 im Skript) direkt checken. Dabei muss man lediglich benutzen, dass diese Axiome in X und Y gelten.

(ii) Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von X
und $\{w_1, \dots, w_m\}$ Basis von Y .

Zu zeigen: $B := \{(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_m)\}$
ist eine Basis von $X \times Y$.

1) B ist lin. unabh.:

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$ und sei

$$\alpha_1(v_1, 0) + \dots + \alpha_n(v_n, 0) + \beta_1(0, w_1) + \dots + \beta_m(0, w_m) =$$

$$(0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^m \beta_j w_j \right) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0 \quad \& \quad \sum_{j=1}^m \beta_j w_j = 0$$

$\{v_i\}_{i=1}^n$ lin. unabh.
& $\{w_j\}_{j=1}^m$ lin. unabh.

$$\alpha_i = 0 \quad \forall i=1, \dots, n \quad \& \quad \beta_j = 0 \quad \forall j=1, \dots, m$$

$\Rightarrow B$ lin. unabh. $\checkmark$

$$2) \langle B \rangle = X \times Y$$

⑦

$\langle B \rangle \subset X \times Y$ ist trivial. Für die umgekehrte Inklusion, sei $p \in X \times Y$. Dann $\exists x \in X, y \in Y (p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$ und es gilt (da $X = \langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle$ & $Y = \langle \{w_1, \dots, w_m\} \rangle$)

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \left(x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right)$$

$$\& \exists \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R} \left(y = \sum_{j=1}^m \beta_j w_j \right)$$

$$\Rightarrow p = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^m \beta_j w_j \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i (v_i, 0) + \sum_{j=1}^m \beta_j (0, w_j) \in \langle B \rangle.$$

$$\Rightarrow X \times Y \subset \langle B \rangle.$$

(iii) $\dim(X \times Y) = n + m$ folgt direkt aus (ii), da $|B| = n + m$.

(IV) Zeige: pr_X und pr_Y sind lineare Abbildungen.

⑧

Seien $p = (x_1, y_1) \in X \times Y$
 $q = (x_2, y_2) \in X \times Y$ und $a \in \mathbb{R}$.

Dann gilt:

$$\bullet \text{pr}_X(p+q) = \text{pr}_X(x_1+x_2, y_1+y_2) = x_1+x_2$$

$$= \underbrace{\text{pr}_X(x_1, y_1)}_{=x_1} + \underbrace{\text{pr}_X(x_2, y_2)}_{=x_2} = \text{pr}_X(p) + \text{pr}_X(q)$$

$$\bullet \text{pr}_X(ap) = \text{pr}_X(ax_1, ay_1) = ax_1 = a \cdot \text{pr}_X(x_1, y_1) \\ = \text{pr}_X(p) \cdot a$$

Analog zeigt man, dass pr_Y linear ist.

(V) Zeige die universelle Eigenschaft von Produkträumen:

Die eindeutig bestimmte lineare Abbildung h , für welche das Diagramm in der Aufgabenstellung kommutiert, ist

durch $h(z) := (f(z), g(z))$ definiert.

Beweis:

↻

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= \text{pr}_X(h(z)) \\ &\& g(z) = \text{pr}_Y(h(z)) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{gilt nach} \\ \text{Definition und bestimmt} \\ h \text{ eindeutig} \end{array}$$

⑨

Es bleibt also nur zu zeigen, dass h linear ist:

Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}$.

$$\bullet h(z_1 + z_2) = (f(z_1 + z_2), g(z_1 + z_2)) =$$

$$\stackrel{f \text{ lin.}}{=} \stackrel{g \text{ lin.}}{=} (f(z_1) + f(z_2), g(z_1) + g(z_2)) =$$

$$= (f(z_1), g(z_1)) + (f(z_2), g(z_2)) = h(z_1) + h(z_2)$$

$$\bullet h(az_1) = (f(az_1), g(az_1))$$

$$\stackrel{f \text{ lin.}}{=} \stackrel{g \text{ lin.}}{=} (af(z_1), ag(z_1)) = a \cdot (f(z_1), g(z_1)) = ah(z_1).$$

Exercise 3

(10)

X Vektorraum, $\dim(X) = n \in \mathbb{N}$, $Y, Z \subseteq X$

Zeige: $\dim Y + \dim Z = \dim(Y+Z) + \dim(Y \cap Z)$.

Beweis: (Wir benutzen Theorem 2.4.8 aus dem Skript und Exercise 2).

Definiere Funktion $f: Y \times Z \rightarrow X$ durch

$$f(y, z) := y - z$$

Dann gilt: $f \in \mathcal{L}(Y \times Z, X)$.

$$\begin{aligned} & \bullet f((y_1, z_1) + (y_2, z_2)) = f(y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = (y_1 - z_1) + (y_2 - z_2) = \\ &= f(y_1, z_1) + f(y_2, z_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet f(a(y_1, z_1)) = f(ay_1, az_1) = \\ &= ay_1 - az_1 = a(y_1 - z_1) = a f(y_1, z_1) \end{aligned}$$

Da f linear ist, können wir nun Theorem 2.4.8 benutzen:

$$\dim(Y \times Z) = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f)$$

Nach Exercise 2 gilt $\dim(Y \times Z) = \dim Y + \dim Z$.
Es bleibt also noch zu zeigen:

- $\dim \operatorname{Ker}(f) \stackrel{!}{=} \dim Y \cap Z$

(11)

- $\dim \operatorname{Im}(f) \stackrel{!}{=} \dim Y + Z$

Wir zeigen:

1) $\operatorname{Ker}(f) \cong Y \cap Z$:

$$\operatorname{Ker}(f) \ni (y, z) \iff f(y, z) = 0 \iff y - z = 0 \iff y = z \in Y \cap Z,$$

d.h. $\operatorname{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} : z \in Y \cap Z \right\}$ und somit

$\operatorname{Ker}(f) \cong Y \cap Z$, insbesondere gilt:

$$\dim \operatorname{Ker}(f) = \dim Y \cap Z.$$

2) $\operatorname{Im}(f) = Y + Z$

- $\operatorname{Im}(f) \subset Y + Z$: Sei $x \in \operatorname{Im}(f)$.

$$\Rightarrow \exists (y, z) (f(y, z) = x)$$

$$\Rightarrow \exists y \in Y, z \in Z (y - z = x) \Rightarrow x = y + (-z) \in Y + Z.$$

- $Y + Z \subset \operatorname{Im}(f)$: Sei $x \in Y + Z$.

$$\Rightarrow \exists y \in Y, z \in Z : x = y + z = y - (-z)$$

$$\Rightarrow f(y, -z) = x \Rightarrow x \in \operatorname{Im}(f).$$

Insbesondere gilt also $\dim \operatorname{Im}(f) = \dim Y + Z$,
somit ist die Behauptung bewiesen.

Exercise 4

(12)

(i)

• (a) $\Rightarrow$ (b), d.h. $\text{Ker}(f) = \{0\} \Rightarrow \text{Im}(f) = Y$:

Nach Theorem 2.4.8 gilt

$$n = \dim(X) = \underbrace{\dim \text{Ker}(f)}_{= 0, \text{ da } \text{Ker}(f) = \{0\}} + \dim \text{Im}(f)$$

$$\Rightarrow \dim \text{Im}(f) = n - 0 = n, \text{ d.h.}$$

$$\text{Im}(f) \subseteq Y \quad \& \quad \dim \text{Im}(f) = \dim(Y) = n$$

Cor. 2.2.18 (iii)
 $\Rightarrow$

$$\text{Im}(f) = Y \quad \checkmark$$

• (b) $\Rightarrow$ (c), d.h. $\text{Im}(f) = Y \Rightarrow f$ bijektiv:

$\text{Im}(f) = Y \Leftrightarrow f$ surjektiv. Zu zeigen bleibt also: f ist auch injektiv. Das gilt, da

$$n = \dim(X) = \underbrace{\dim \text{Im}(f)}_{= \dim Y = n} + \dim \text{Ker}(f)$$

$$\Rightarrow \dim \text{Ker}(f) = 0 \text{ und somit } \text{Ker}(f) = \{0\}$$

Exercise 4

(viii)

$\Rightarrow f$ ist injektiv. $\checkmark$

$$\bullet (c) \Rightarrow (a), \text{ d.h. } f \text{ bijektiv} \Rightarrow \text{Ker}(f) = \{0\} \quad (13)$$

Nach Definition: f bijektiv $\Rightarrow f$ injektiv &

f injektiv $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0\}$ nach Aufgabe 1 (viii). ✓

(ii) Sei f ein lin. Isomorphismus und sei $g := f^{-1}$.
Wir zeigen: g ist linear. Seien also $y_1, y_2 \in Y, a \in \mathbb{R}$.
Des Weiteren, seien x_1, x_2 eindeutig bestimmte Elemente, für welche gilt: $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$.

Dann:

$$\bullet f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = y_1 + y_2$$

$$\Rightarrow g(y_1 + y_2) = f^{-1}(y_1 + y_2) = x_1 + x_2 = f^{-1}(y_1) +$$

$$f^{-1}(y_2) = g(y_1) + g(y_2)$$

$$\bullet f(ax_1) = a f(x_1) = ay_1$$

$$\Rightarrow g(ay_1) = ax_1 = a \cdot f^{-1}(y_1) = ag(y_1). \quad \checkmark$$

Sei nun $\dim(X) = n$. Dann gilt:

$$n = \dim X = \underbrace{\dim \text{Ker}(g)}_{=0} + \underbrace{\dim \text{Im}(g)}_{= \dim Y, \text{ da } \text{Im}(g) = Y}$$

$$\Rightarrow \dim(Y) = n. \quad \checkmark$$

(iii) Sei X isomorph zu $\mathbb{R}^n$, dann gilt

(14)

$$\dim(X) = \dim(\mathbb{R}^n) = n \text{ nach (ii').}$$

Umgekehrt soll gelten $\dim X = n$. Dann lässt sich ein Isomorphismus folgendermaßen definieren:

Für irgendeine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von X definiere $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die durch $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ eindeutig bestimmten Koeffizienten sind.

Exercise 5

(15)

(i) Sei $x \in X$. Es gilt:

$$x - P(x) \in X$$

$$P(x - P(x)) = P(x) - P(P(x)) = P(x) - P^2(x)$$

$$\underline{P=P^2} \quad P(x) - P(x) = 0$$

$$\Rightarrow x - P(x) \in \text{Ker}(P) \quad \forall x \in X$$

Es gilt:

$$x = \underbrace{(x - P(x))}_{\in \text{Ker}(P)} + \underbrace{P(x)}_{\in \text{Im}(P)} \in \text{Ker}(P) + \text{Im}(P)$$

$$\Rightarrow X = \text{Ker}(P) + \text{Im}(P)$$

Zu zeigen bleibt: $\text{Ker}(P) \cap \text{Im}(P) = \{0\}$.

Sei also $x \in \text{Ker}(P) \cap \text{Im}(P)$, dann gilt

$$P(x) = 0 \quad \& \quad \exists y (P(y) = x). \text{ Sei } y \in P^{-1}(x).$$

$$\text{Dann: } x = P(y) = P^2(y) = P(\underbrace{P(y)}_{=x}) = P(x) = 0$$

$$\Rightarrow \text{Ker}(P) \cap \text{Im}(P) = \{0\} \quad \text{und somit}$$

$$X = \text{Ker}(P) \oplus \text{Im}(P) \quad \checkmark$$

(ii)

(16)

a) $P + Q = \text{id}_X$, denn

$$\begin{aligned}\forall x \in X : (P + Q)(x) &= P(x) + Q(x) = \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cancel{T(x)} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cancel{T(x)}\right) \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x = x\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P + Q = \text{id}_X$$

b) $P^2 = P$, denn

$$\forall x \in X : P^2(x) = \frac{1}{2} [\text{id}_X(P(x)) + T(P(x))]$$

$$= \frac{1}{2} [P(x) + T(P(x))]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}T(x) + T\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}T(x)\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x + T(x) + \underbrace{\frac{1}{2}T^2(x)}_{=\text{id}_X(x)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} [x + T(x)] = P(x).$$

Analog für Q .

(iii)

17

$$PQ = QP = 0$$

$$\forall x \in X: P(Q(x)) = P\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}T(x)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}T(x)\right) + T\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}T(x)\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x - \cancel{\frac{1}{2}T(x)} + \cancel{\frac{1}{2}T(x)} - \frac{1}{2} \underbrace{T^2(x)}_{= \text{id}_X(x)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x \right] = 0.$$

Analog zeigt man $QP = 0$.