

Exercise 1

(i) M ist lin. unabhängig. Um zu zeigen, dass M eine Basis ist, reicht es $\langle M \rangle = X$ zu zeigen.

$\langle M \rangle \subset X$ ist klar.

Zeige: $X \subset \langle M \rangle$. Hierfür sei $x \in X$ beliebig.

$\{x, v_1, \dots, v_n\}$ ist nach Annahme lin. ~~un~~abhängig,

d.h. $\exists a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, sodass

$$(*) \quad a_0 x + a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0 \quad \text{und} \quad \exists i \in \{0, \dots, n\} \quad a_i \neq 0$$

Es gilt: $a_0 \neq 0$, denn:

Angenommen es gilt $a_0 = 0$, dann folgt aus (*)

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0 \xrightarrow[\text{unabh.}]{\{v_1, \dots, v_n\}} a_1 = \dots = a_n = 0 \quad \begin{matrix} \swarrow \exists i: \\ \searrow a_i \neq 0 \end{matrix}$$

Also gilt $a_0 \neq 0$ und somit

$$x = -\frac{1}{a_0} \cdot \left(\frac{a_1}{a_0} v_1 + \dots + \frac{a_n}{a_0} v_n \right) \in \langle M \rangle$$

(ii) Sei $n = \dim(X)$.

(2)

Es folgt (per Definition der Dimension):

Es gibt eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von X (d.h.

$\langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle = X$ und $\{v_1, \dots, v_n\}$ lin. unabh.)

Die Behauptung folgt nun direkt aus Lemma 2.2.12 (Steinitz) (Teil ii)).

(iii) $Y \leq X$, $\dim(Y) = \dim(X) = n \in \mathbb{N}$.

Zu zeigen ist: $Y = X$.

Sei $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine Basis von Y und
($\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von X).

$\Rightarrow \{w_1, \dots, w_n\}$ lin. unabh. in Y

$\Rightarrow \{w_1, \dots, w_n\}$ lin. unabh. in X

(ii) $\Rightarrow \{w_1, \dots, w_n\}$ ist eine Basis von X

Das impliziert wiederum:

$$X = \langle \{w_1, \dots, w_n\} \rangle = Y.$$

Exercise 1

(3)

(IV) Da $\dim(X) = n$, gibt es eine Basis $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ von X .

Wir benutzen Lemma 2.2.12 ii) (Steinitz) und erhalten

$$\langle \{w_1, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_n\} \rangle = X.$$

Darüber hinaus ist $\{w_1, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ linear unabh., da sonst eine Basis von X mit weniger als n Elementen existiert, was zum Widerspruch ^{zu} $\dim(X) = n$ führt.

Exercise 2

(4)

X Vektorraum ; $Y, Z \subseteq X$, sodass

$$(*) \quad X = Y \oplus Z \iff \forall x \in X \exists! y \in Y \exists! z \in Z (x = y + z)$$

$$1) \quad X = Y \oplus Z \Rightarrow (X = Y + Z \quad \& \quad Y \cap Z = \{0\})$$

$$X = Y \oplus Z \Rightarrow X = Y + Z \text{ ist klar } \checkmark$$

$$X = Y \oplus Z \Rightarrow Y \cap Z = \{0\} \text{ gilt, da:}$$

Angenommen, $Y \cap Z \neq \{0\}$ und sei $w \in Y \cap Z$,
sodass $w \neq 0$. Dann gilt:

$$X \ni w = \underbrace{w}_{\in Y} + \underbrace{0}_{\in Z} = \underbrace{0}_{\in Y} + \underbrace{w}_{\in Z} \quad \swarrow \text{Definition } (*)$$

(Die Darstellung von $w \in X$ als Summe von einem Element aus Y und einem Element aus Z ist nicht eindeutig).

Somit ist unsere Annahme falsch und es

$$\text{gilt } Y \cap Z = \{0\}$$

$$\Rightarrow (a \Rightarrow b) \quad \checkmark$$

$$2) X = Y + Z \quad \& \quad Y \cap Z = \{0\}$$

(5)

$$\stackrel{!}{\Rightarrow} X = Y \oplus Z.$$

Seien $y, y' \in Y, z, z' \in Z$ und $x \in X$, sodass

$$x = y + z = y' + z'. \text{ Dann gilt:}$$

$$y - y' = (z' - z) = -(z - z') \in Z. \text{ D.h.}$$

$(y - y')$ und $(z - z')$ sind Vielfache voneinander und somit gilt

$$(y - y') \in Z, (z - z') \in Y$$

$$\Rightarrow (y - y'), (z - z') \in Y \cap Z$$

$$\underbrace{Y \cap Z = \{0\}}_{\Rightarrow} (y - y') = 0 = (z - z')$$

$$\Leftrightarrow y = y' \text{ und } z = z'.$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Darstellung von $x \in X$ als Summe ~~won~~ $x = \underbrace{y}_{\in Y} + \underbrace{z}_{\in Z}$ eindeutig ist, d.h. $X = Y \oplus Z$.

Exercise 3

(6)

X Vektorraum, $\dim(X) = n$.

(i) Für $Y \leq X$ zeige:

$$\exists Z \leq X \ (X = Y \oplus Z).$$

1) Für $Y = \{0\}$ gilt $X = Y \oplus X$.

2) Für $Y \neq \{0\}$, gilt nach Kor. 2.2.17:

Y hat eine Basis und $\dim(Y) \leq n$.

Sei $\dim(Y) =: m$ und sei $\{v_1, \dots, v_m\}$ eine Basis von Y .

Fall 1: $m = n$

Dann gilt $Y = X$. Setze $Z := \{0\}$.

Fall 2: $m < n$

Nach Kor. 2.2.16 (iv) gibt es Elemente

$w_{m+1}, \dots, w_n$, sodass $\{v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n\}$ eine Basis von X ist.

Setze $Z := \langle \{w_{m+1}, \dots, w_n\} \rangle$. Dann gilt $X = Y \oplus Z$.

(ii) Z ist nicht eindeutig bestimmt. Gegenbeispiel:

Sei $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \langle \{(1,0)\} \rangle \leq \mathbb{R}^2$, $Z = \langle \{(0,1)\} \rangle \leq \mathbb{R}^2$ und $Z' = \langle \{(1,1)\} \rangle \leq \mathbb{R}^2$. Dann gilt $X = Y \oplus Z = Y \oplus Z'$.

(iii) Seien $Y, Z \leq X$, sodass $Y \oplus Z = X$ (7)
und $\dim(Y) = m_1$, $\dim(Z) = m_2$.

Dann existieren Basen $\{v_1, \dots, v_{m_1}\}$ von Y
und $\{w_1, \dots, w_{m_2}\}$ von Z .

Nun gilt:

$$\{v_1, \dots, v_{m_1}, w_1, \dots, w_{m_2}\}$$

ist eine Basis von X :

$$\langle \{v_1, \dots, v_{m_1}, w_1, \dots, w_{m_2}\} \rangle = X$$

& $\{v_1, \dots, v_{m_1}, w_1, \dots, w_{m_2}\}$ lin. unabh.

Exercise 4

(8)

$Y \subset X$ lin. unabh.; $x_0 \in X$, sodass $x_0 \notin \langle Y \rangle$.

Zu zeigen: $Y \cup \{x_0\}$ ist lin. unabh.

Beweis durch Widerspruch:

Angenommen, $Y \cup \{x_0\}$ ist lin. abh.

Dann gibt es eine endliche Teilmenge Z von $Y \cup \{x_0\}$, sodass Z lin. abh. ist.

Dabei gilt $x_0 \in Z$, da jede endliche Teilmenge von Y lin. unabh. ist.

Sei $Z := \{y_1, \dots, y_n, x_0\}$, wobei $n \geq 1$ und $y_1, \dots, y_n \in Y$ (für $n=0$ würde $x_0=0$ gelten $\nrightarrow x_0 \notin \langle Y \rangle$).

Da Z lin. abh. ist, gibt es eine Linearkombination

$$a_0 x_0 + a_1 y_1 + \dots + a_n y_n = 0,$$

sodass $\exists i \in \{0, \dots, n\} (a_i \neq 0)$.

Angenommen, $a_0 = 0$, dann gilt

$$a_1 y_1 + \dots + a_n y_n = 0 \text{ und, da } Y \text{ lin. unabh. ist, folgt } a_1 = \dots = a_n = 0$$

$\nrightarrow$ für ein i $a_i \neq 0$

$\Rightarrow a_0 \neq 0$ und somit

(9)

$$x_0 = \left(-\frac{a_1}{a_0}\right) y_1 + \left(-\frac{a_2}{a_0}\right) y_2 + \dots + \left(-\frac{a_n}{a_0}\right) y_n$$

$$\in \langle \{y_1, \dots, y_n\} \rangle \subset \langle Y \rangle \quad \searrow \quad x_0 \notin \langle Y \rangle.$$

Somit führt unsere Annahme

$Y \cup \{x_0\}$ lin. abh.

zum Widerspruch und der Beweis ist abgeschlossen.

Exercise 5

Wir benutzen das Lemma von Zorn folgendermaßen:

Sei $I(Y, X) := \{Z \subseteq X \mid Z \text{ ist lin. unabh. \& } Y \subset Z\}$.

$I(Y, X)$ ist nicht leer, da $Y \in I(Y, X)$ gilt. Wir stellen $I(Y, X)$ mit der Partialordnung

$\subseteq$ aus: $(Z_1, Z_2) \in \subseteq \Leftrightarrow Z_1 \subseteq Z_2$.

Zunächst zeigen wir: Jede Kette in $I(Y, X)$ besitzt eine obere Schranke in $I(Y, X)$.

Sei also $C \subseteq \mathcal{I}(Y, X)$ eine Kette in $\mathcal{I}(Y, X)$. (10)

Wir zeigen, dass

$$UC := \{x \in X \mid \exists A \in C (x \in A)\}$$

eine obere Schranke von C in $\mathcal{I}(Y, X)$ ist, i.e.

$$\forall A \in C (A \subseteq UC), \text{ wobei } UC \in \mathcal{I}(Y, X).$$

• $\forall A \in C (A \subseteq UC)$ gilt nach Def. von UC .

• $UC \in \mathcal{I}(Y, X)$:

a) $Y \subseteq UC$, denn $Y \in \mathcal{I}(Y, X)$ und

$$\forall A \in C (Y \subseteq A) \Rightarrow Y \subseteq UC.$$

b) UC lin. unabh., denn:

Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Teilmenge von UC , dann gilt $\exists A_1, \dots, A_n \in C (v_1 \in A_1, \dots, v_n \in A_n)$.

Da C total geordnet ist, gibt es ein $i_0 \in \{1, \dots, n\}$, sodass $A_i \subseteq A_{i_0} \forall i \in \{1, \dots, n\}$ gilt.

Es gilt also: $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq A_{i_0} \in C$ und da $A_{i_0} \in C$ lin. unabh. ist, so ist auch $\{v_1, \dots, v_n\}$ lin. unabh. Da dies für beliebige endl. Teilmengen von C gilt, ist C selbst wiederum lin. unabh.

Wir haben also gezeigt, dass

(11)

UC eine obere Schranke für C ist
und $UC \in I(X, Y)$.

Lemma $I(X, Y)$ besitzt ein maximales
von Zorn Element B

Zu zeigen bleibt, dass B das gesuchte
Objekt ist, d.h. eine Basis von X , die Y
enthält:

- $Y \subset B$, da $B \in I(X, Y)$
- B ist lin. unabh., da $B \in I(X, Y)$

und $\langle B \rangle = X$, denn:

Sei $x \in X$ und $x \notin \langle B \rangle$. Dann gilt,
da B lin. unabh. ist, dass $\{x\} \cup B$ lin. unabh.
ist (nach Exercise 4) ~~und somit~~ und somit

$B \cup \{x\} \in I(X, Y) \nleftrightarrow$ Maximalität von B .

$\Rightarrow \forall x \in X (x \in \langle B \rangle)$ und damit ist B
eine Basis von X .

