

Exercise 1

$$(i): a + b\sqrt{18} = a' + b'\sqrt{18}$$

$$\Leftrightarrow (a-a') + (b-b')\sqrt{18} = 0$$

(iii)

Angenommen: $b-b' \neq 0$

Dann hat $b-b'$ ein mult. Inverses in $\mathbb{Q}$ und es gilt

$$\sqrt{18} = \frac{-(a-a') \in \mathbb{Q}}{b-b' \in \mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \quad \swarrow \begin{matrix} \sqrt{2} \\ \text{irrational} \end{matrix}$$

D.h., unsere Annahme war falsch und es gilt

$$b-b'=0 \Leftrightarrow b=b'. \text{ Daraus folgt direkt}$$

$$a-a'=0 \Leftrightarrow a=a'$$

$$(ii): \bullet \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{18}) \Rightarrow 0,1 \in \mathbb{Q}$$

$$\{a + 0 \cdot \sqrt{18} \mid a \in \mathbb{Q}\}$$

• $\mathbb{Q}(\sqrt{18})$ ist abgeschl. bzgl. + und $\cdot$, denn

⊆

$\forall a, b \in \mathbb{Q}$:

$$(a + b\sqrt{18'}) + (a' + b'\sqrt{18'}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{18'} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{18'})(a' + b'\sqrt{18'}) &= aa' + (ab' + a'b)\sqrt{18'} + 18bb' \\ &= \underbrace{(aa' + 18bb')}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{(ab' + a'b)}_{\in \mathbb{Q}}\sqrt{18'} \end{aligned}$$

(iii): Berechne das mult. Inverse von $0 \neq a + b\sqrt{18'}$
 $\uparrow$
 $\mathbb{Q}(\sqrt{18'})$

$$\frac{1}{a + b\sqrt{18'}} \cdot (a + b\sqrt{18'}) = 1$$

$$\frac{1}{a + b\sqrt{18'}} = \frac{a - b\sqrt{18'}}{(a + b\sqrt{18'})(a - b\sqrt{18'})} \stackrel{\substack{\text{lin.} \\ \text{Formel}}}{=} \frac{a - b\sqrt{18'}}{a^2 - (b\sqrt{18'})^2} =$$

$$= \frac{a - b\sqrt{18'}}{a^2 - 18b^2} = \underbrace{\frac{a}{a^2 - 18b^2}}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{\left(\frac{-b}{a^2 - 18b^2}\right)}_{\in \mathbb{Q}}\sqrt{18'}$$

Exercise 2

(3)

(i) $z=w, x=y \Rightarrow z+x=w+y$ } gilt, da + und $\cdot$ wohldef.
(ii) $x=y, a=b \Rightarrow ax=by$ } Verknüpfungen sind

(iii) $x+y=x+z=0 \Rightarrow y=z$, denn

$$x+y=x+z=0 \Rightarrow z+(x+y)=z+(x+z)=z$$

$$\Rightarrow (z+x)+y=z \quad \& \quad x+z=0$$

$$\Rightarrow (x+z)+y=z \quad \& \quad x+z=0$$

$$\Rightarrow \cancel{y} = 0+y=z \quad \checkmark$$

(iv) $0x=0$, denn

$$x=1x=(0+1)x=0x+x$$

$$\Rightarrow x+(-x)=(0x+x)+(-x)$$

$$\Rightarrow 0=0x+(x+(-x))=0x+0 \Rightarrow 0=0x \quad \checkmark$$

(v) $(-1)x=-x$, denn

$$x+(-1)x=(1+(-1))x=0x \stackrel{(iv)}{=} 0 = x+(-x)$$

$$\stackrel{(iii)}{\Rightarrow} (-1)x=-x$$

(vi) Wir zeigen: $x \neq 0, ax=0 \Rightarrow a=0$:

Angenommen: $a \neq 0$

$$\text{Dann gilt: } x = \frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a} \cdot 0 = 0 \quad \begin{array}{l} \swarrow \text{Annahme} \\ \searrow x \neq 0 \end{array}$$

Somit muss gelten $a=0$.

Exercise 3

(4)

(i): Zeige $U+V \subseteq X$

a) Seien $x_1, x_2 \in U+V$, wobei

$x_1 = u_1 + v_1$ und $x_2 = u_2 + v_2$ für $u_1, u_2 \in U$ und $v_1, v_2 \in V$.

Dann gilt, da U und V Untervektorräume sind:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \\ &= \underbrace{(u_1 + u_2)}_{\in U} + \underbrace{(v_1 + v_2)}_{\in V} \in U+V \end{aligned}$$

b) Da U und V Untervektorräume sind, gilt $0 \in U$ und $0 \in V$. Somit folgt

$$0 = 0 + 0 \in U+V$$

c) Sei $a \in \mathbb{R}$, $x \in U+V$, wobei

$x = u + v$ für $u \in U$ und $v \in V$. Dann gilt, da U und V ~~unter~~ Untervektorräume sind:

$$ax = a(u+v) = \underbrace{au}_{\in U} + \underbrace{av}_{\in V} \in U+V$$

a), b), c)

$$\implies U+V \subseteq X$$

(ii): Zeige $U \cap V \neq \emptyset$

(5)

a) Seien $x_1, x_2 \in U \cap V$. Dann gilt

$$\bullet x_1 \in U \text{ und } x_2 \in U \xRightarrow{U \neq \emptyset} x_1 + x_2 \in U$$

$$\bullet x_1 \in V \text{ und } x_2 \in V \xRightarrow{V \neq \emptyset} x_1 + x_2 \in V$$

und somit $x_1 + x_2 \in U \cap V$.

$$b) \underset{\substack{\uparrow \\ U \neq \emptyset}}{0 \in U} \quad \& \quad \underset{\substack{\uparrow \\ V \neq \emptyset}}{0 \in V} \Rightarrow 0 \in U \cap V$$

c) Sei $x \in U \cap V, a \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$ax \in U \quad \& \quad ax \in V \quad \text{und somit } ax \in U \cap V$$

$\uparrow U \neq \emptyset \qquad \qquad \uparrow V \neq \emptyset$

$$\xRightarrow{a), b), c)} U \cap V \neq \emptyset$$

(iii): Sei $V \neq \emptyset$, sodass $\gamma \in V$, dann gilt

$$\cap \{ U \neq \emptyset \mid \gamma \in U \} \subset V. \text{ Es reicht}$$

also zu zeigen: $\langle \gamma \rangle$ ist ein Untervektorraum.

Der Beweis ist analog zu (ii).

(IV) :

(6)

a) $\text{Hull}(Y) := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i y_i \mid \dots \right\}$ ist ein Untervektorraum von X .

Somit gilt nach (ii) : $\langle Y \rangle \subset \text{Hull}(Y)$

b) Zeige : $\text{Hull}(Y) \subset \langle Y \rangle$

Sei $y \in \text{Hull}(Y)$, $y = \sum_{i=1}^n a_i y_i$ und sei

$V \perp X$, wobei $Y \subset V$.

Dann gilt $\sum_{i=1}^n \underbrace{a_i y_i}_{\in V} \in V$.

Somit liegt y auch im Schnitt aller Unterräume, die Y enthalten, d.h. ~~der~~ $y \in \langle Y \rangle$

$\Rightarrow \text{Hull}(Y) \subset \langle Y \rangle$

(V) : $Y \subset Z \Rightarrow \langle Y \rangle \subset \langle Z \rangle$, denn:

Sei $y \in \langle Y \rangle$, dann (nach (iv)) können wir y als Linearkombination von Vektoren aus Y schreiben, welche wiederum auch in Z liegen, da $Y \subset Z$. Somit gilt die Behauptung nach Teil (iv).

(vi): $\langle \langle Y \rangle \rangle = \langle Y \rangle$, denn: (7)

Sei $V \neq X$. Dann gilt $V \subset \langle V \rangle$ nach (iii) und $\langle V \rangle \subset V$ nach Definition.

Setze $V = \langle Y \rangle$ um die Behauptung zu erhalten.

(vii): $\langle Y \rangle \cup \langle Z \rangle \subset \langle Y \cup Z \rangle$, denn:

Sei $x \in \langle Y \rangle \cup \langle Z \rangle$, dann gilt

entweder $\bullet$ x ist als Lin. komb. von Elementen aus Y gegeben: $x = \sum_{\substack{i \\ y_i \in Y}} a_i y_i$ oder

$\bullet$ x ist als Lin. komb. von El. aus Z gegeben: $x = \sum_{\substack{j \\ z_j \in Z}} b_j z_j$, d.h.

$x = \sum a_i y_i + \sum b_j z_j$, wobei entweder

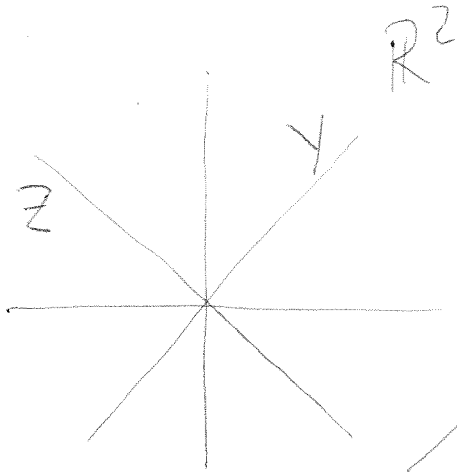
$a_i = 0 \forall i$ oder $b_j = 0 \forall j$.

Somit gilt: $x \in \text{Hull}(Y \cup Z) \stackrel{(iii)}{=} \langle Y \cup Z \rangle$

(viii): Gegenbeispiel:

(8)

Setze $X := \mathbb{R}^2$, $Y := \{(1,1)\}$
 $Z := \{(-1,1)\}$



Dann gilt:

$$\langle Y \cup Z \rangle = \mathbb{R}^2, \text{ aber}$$

$$\langle Y \rangle \cup \langle Z \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2 \right.$$

$$\text{oder } x_1 = -x_2 \} \subsetneq \mathbb{R}^2.$$

Exercise 4.

Zu zeigen ist: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind
die Funktionen $f_1(t) := e^t$

$$f_n(t) := e^{nt}$$

linear unabh. in $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Beweis per vollständige Induktion:

Induktionsanfang:

$n=1$: $\{e^t\}$ ist lin. unabh., trivial ✓

Induktionsschritt

(9)

$n \rightarrow n+1$: Ang., $\{f_1, \dots, f_n\}$ ist lin. unabh. für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass dann auch $\{f_1, \dots, f_{n+1}\}$ lin. unabh. ist.

$$a_1 e^t + a_2 e^{2t} + \dots + a_{n+1} e^{t(n+1)} = 0 \quad (1)$$

Ableitung
 $\xrightarrow{\text{nach } t}$

$$a_1 e^t + 2a_2 e^{2t} + \dots + (n+1)a_{n+1} e^{(n+1)t} = 0 \quad (2)$$

$(2) - (1)$
 $\Rightarrow$

$$\underbrace{e^t}_{\neq 0} \cdot \left(\underbrace{a_2 e^t}_{=: f_1(t)} + \dots + \underbrace{na_{n+1} e^{nt}}_{=: f_n(t)} \right) = 0$$

$= 0, \text{ da } e^t \neq 0$

Induktions-

$\Rightarrow$
annahme

$$a_2, \dots, na_{n+1} = 0$$

$\Rightarrow a_2, \dots, a_{n+1} = 0$. Daher lässt sich (1) schreiben, als $a_1 e^t + 0 = 0 \xrightarrow{e^t > 0} a_1 = 0$.

Insgesamt sind also alle Koeffizienten $a_1, \dots, a_{n+1}$ in (1) gleich 0 und $\{f_1, \dots, f_{n+1}\}$ somit lin. unabh. $\square$

Exercise 5.

10

(1): z.z.: $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

Annahme 1: $P \Rightarrow Q$

„Widerspruch“

Annahme 2: $\neg Q := (Q \Rightarrow \perp)$

Wir zeigen (unter Ann. 1 und Ann 2):

$$\neg P := (P \Rightarrow \perp).$$

Annahme 3: P

Ann. 1 & $P \Rightarrow Q$ und
Modus Ponens

Ann. 2 & $Q \Rightarrow \perp$, wir haben
Modus Ponens

also insgesamt $\neg P := (P \Rightarrow \perp)$ gezeigt.

(ii) : $(\neg\neg\neg P) \Rightarrow \neg P$, denn: (11)

Zunächst zeigen wir $P \Rightarrow \neg(\neg P) = \underbrace{(P \Rightarrow \perp)}_{=:\neg P} \Rightarrow \perp$

Annahme 1 : P

Annahme 2 : $\neg P := P \Rightarrow \perp$

Ann. 1 & Ann. 2 $\xRightarrow{\text{MP}} \perp$

Damit haben wir gezeigt : $P \Rightarrow \underbrace{[(P \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp]}_{=:\neg\neg P}$

Nun können wir $(\neg\neg\neg P) \Rightarrow \neg P$ zeigen:

Ann. 3 : $\neg\neg\neg P$

Wir zeigen unter Ann. 3, dass $\neg P$ gilt

Ann. 4 : P

Nun folgt via MP (Modus Ponens)

$$P \ \& \ (P \Rightarrow \neg\neg P) \ \& \ \neg\neg\neg P \Rightarrow \perp$$

(iii) : $\neg \forall x \in X \phi(x) \Rightarrow \exists x \in X (\neg \phi(x))$ (12)

Ann 1 : $[\forall x \in X \phi(x)] \Rightarrow \perp$

Wir zeigen : $\exists x \in X \phi(x)$

Es reicht zu zeigen : $\neg \neg \exists x \in X (\neg \phi(x))$ und

DNS ($\neg \neg P \Rightarrow P$) zu benutzen

Ann. 2 : $\neg \exists x \in X (\neg \phi(x))$

Mit Prop. 3.2.1 folgt aus Ann. 2 :

$$\forall x \in X (\neg \neg \phi(x))$$

$$\xRightarrow{\text{DNS}} \forall x \in X (\phi(x)) \xRightarrow[\text{MP}]{\text{Ann. 1}} \perp$$

Insgesamt haben wir gezeigt :

$$\neg \exists x \in X (\neg \phi(x)) \Rightarrow \perp$$

$$\therefore \neg \neg \exists x \in X (\neg \phi(x)) \stackrel{\text{DNS}}{=} \exists x \in X (\neg \phi(x))$$

(IV) : Zu zeigen : $\exists x \in X (\neg \phi(x)) \Rightarrow \neg \forall x \in X \phi(x)$

Ann. 1 : $\exists x \in X (\neg \phi(x))$

(13)

Wir zeigen, dass unter Annahme 1 gilt:

$$\neg \forall x \in X \phi(x) := (\forall x \in X \phi(x)) \Rightarrow \perp$$

Ann. 2 : $\forall x \in X \phi(x)$

Nach Ann. 1 existiert ein $x \in X$, sodass

$$\neg \phi(x) := \phi(x) \Rightarrow \perp.$$

Für dieses x gilt nach Ann. 2 $\phi(x)$.

$$\begin{array}{c} \neg \phi(x), \phi(x) \\ \xRightarrow{\text{MP}} \perp \end{array}$$

Unter Annahme 1 gilt also

$$\forall x \in X \phi(x) \Rightarrow \perp, \text{ was}$$

zu zeigen war.