

Exercise 1

(i): Für $x, y \in X$ gilt $\langle (S+T)x, y \rangle = \langle x, (S+T)^t y \rangle$

aber auch

$$\begin{aligned}\langle (S+T)x, y \rangle &= \langle Sx + Tx, y \rangle = \\ &= \langle Sx, y \rangle + \langle Tx, y \rangle = \langle x, S^t y \rangle + \langle x, T^t y \rangle \\ &= \langle x, S^t y + T^t y \rangle = \langle x, (S^t + T^t) y \rangle\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\forall x \in X: \langle x, (S+T)^t y \rangle = \langle x, (S^t + T^t) y \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle x, (S+T)^t y - (S^t + T^t) y \rangle = 0 \quad \forall x \in X$$

ii) $(S+T)^t y - (S^t + T^t) y = 0$ und da
nicht-degeneriert
dies für alle $y \in X$ gilt: $(S+T)^t = S^t + T^t$
 $\square$

$$(ii) : \forall x, y \in X \text{ gilt } \langle (1S)x, y \rangle = \langle x, (1S)^t y \rangle,$$

$$\text{aber auch } \langle (1S)x, y \rangle = \lambda \langle Sx, y \rangle = \quad (2)$$

$$= \lambda \langle x, S^t y \rangle = \langle x, \lambda S^t y \rangle$$

$$\xRightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ nicht-degeneriert}} (1S)^t y = \lambda S^t y \quad \forall y \in X$$

$$(iii) : \forall x, y \in X \text{ gilt } \langle (S \circ T)x, y \rangle =$$

$$= \langle x, (S \circ T)^t y \rangle, \text{ aber auch}$$

$$\langle (S \circ T)x, y \rangle = \langle S(Tx), y \rangle$$

$$= \langle Tx, S^t y \rangle = \langle x, T^t S^t y \rangle$$

$$\xRightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ n-deg.}} (S \circ T)^t y = T^t S^t y \quad \forall y \in X$$

$$(iv) : \forall x, y \in X (\langle S^t x, y \rangle = \langle x, (S^t)^t y \rangle,$$

$$\text{aber auch } \langle S^t x, y \rangle = \langle y, S^t x \rangle = \langle Sy, x \rangle$$

$$= \langle x, Sy \rangle \xRightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ n-deg.}} Sy = (S^t)^t y \quad \forall y \in X$$

Exercise 2

(3)

(i). Setze $X := \mathbb{R}$, $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $x \mapsto 2x$ und sei

$$\langle x, y \rangle := x \cdot y \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ Dann gilt}$$

$$x \perp y \Leftrightarrow xy = 0 \quad \text{und}$$

$$x \perp y \Rightarrow Tx \perp Ty \Leftrightarrow 2x \cdot 2y = 0,$$

aber T ist nicht unitär, denn

$$T(1) = 2 \quad \begin{array}{l} \swarrow \text{Widerspruch zu} \\ \searrow (T \text{ unitär} \Rightarrow \|Tx\| = 1, \\ \text{falls } \|x\| = 1) \end{array}$$

↑
siehe Prop. 5.15

(II) :

(4)

a) $\forall x, y \in X$ ($\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$) und

da $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, U^t Uy \rangle$ und
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit (und somit nicht-degeneriert
ist) gilt :

$$y = U^t Uy \quad \forall y \in X, \text{ d.h.}$$

$$U^t U = \text{id}_X.$$

Umgekehrt gilt, falls $U^t U = \text{id}_X$:

$$\forall x, y \in X : \langle x, U^t Uy \rangle = \langle x, y \rangle$$

"
 $\langle Ux, Uy \rangle$, d.h. U ist unitär.

b) • U unitär $\Rightarrow U$ injektiv, denn

$$U(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{\langle Ux, Ux \rangle}_{= \langle x, x \rangle} = 0 \quad \text{und}$$

$\langle x, x \rangle = 0$ impliziert $= \langle x, x \rangle$, da U unitär

$x = 0$, da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit ist. Somit gilt

☺

$\text{Ker}(U) = \{0\}$ und, da X endlich-dimensional (5)
ist, gilt $(U \text{ injektiv} \Leftrightarrow U \text{ invertierbar})$.

Es bleibt noch, die Inverse zu bestimmen. Aus
(ii) a) wissen wir bereits, dass $U^t \circ U = \text{id}_X$,
somit bleibt noch zu zeigen: $U \circ U^t = \text{id}_X$.

Es gilt: $\forall x, y \in X$

$$\langle UU^t x, Uy \rangle = \langle U^t x, U^t Uy \rangle$$

$$\stackrel{(ii)a)}{=} \langle U^t x, y \rangle = \langle y, U^t x \rangle = \langle Uy, x \rangle$$

$$= \langle x, Uy \rangle. \text{ Da } U \text{ surjektiv ist,}$$

folgt

$$\langle UU^t x, z \rangle = \langle x, z \rangle \quad \forall x, z \in X$$

$$\xrightarrow[\text{degeneriert}]{\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ nicht-}} UU^t x = x \quad \forall x \in X, \text{ d.h.}$$

$$UU^t = \text{id}_X.$$

Exercise 3

(6)

(i). Z.z.: U unitär $\Rightarrow U^t$ unitär

Nach Exercise 2 ii) gilt $U^t \circ U = \text{id}_X = U \circ U^t$,
falls U unitär ist und damit: Sei $x \in X$, dann

$$\|U^t x\|^2 = \langle U^t x, U^t x \rangle \stackrel{\text{def.}}{=} \langle x, (U^t)^t U^t x \rangle$$

$$\stackrel{\text{Ex. 1}}{=} \langle x, \underbrace{U U^t}_{=\text{id}_X} x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

$\Rightarrow \|U^t x\| = \|x\| \quad \forall x \in X$, d.h. U^t ist
normerhaltend und damit unitär.

(ii) gilt direkt nach ~~dem~~ Theorem 5.2.2
aus dem Skript.

Exercise 4

(7)

" $\Leftarrow$ ": Sei $B_X = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von X ,
die aus Eigenvektoren von T besteht, d.h. $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$
 $\lambda_i \neq 0 \forall i$

$$T(v_i) = \lambda_i v_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Die Koordinatenspaltenvektoren $T(v_i)_{B_X}$ haben
die Form $T(v_i)_{B_X} = (0, \dots, \lambda_i, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$
 $\uparrow$
 i -te Stelle

und somit

$$A_{T_{B_X}} = [T(v_1)_{B_X}, \dots, T(v_n)_{B_X}] \text{ ist}$$

eine Diagonalmatrix. In anderen Worten: B_X

diagonalisiert T

" $\Rightarrow$ ": Nehme umgekehrt an, B_X diagonal-
lisiert T . Dann ist $A_{T_{B_X}}$ diagonal, d.h.

$$A_{T_{B_X}} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} [T(v_1)_{B_X}, \dots, T(v_n)_{B_X}]$$

G

Es folgt $T(v_i) B_X = (0, \dots, \alpha_i, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$,
d.h. $T(v_i) = \alpha_i v_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ ⑧
↑
i-te Stelle

und somit besteht B_X aus Eigenvektoren von T .

Exercise 5

(i): Folgt aus (i) für $n=1$

(ii): Sei das Gleichungssystem

$$x'(t) = A x(t) \text{ gegeben } (x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}) \in \mathbb{R}^n$$

für jedes $t \in J$ und $A \in M_n(\mathbb{R})$ oder komponentenweise

$$(*) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad \forall i=1, \dots, n$$

Angenommen $A = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, dann lässt sich (*) schreiben als

$$(**) \quad \frac{dx_i}{dt} = \lambda_i x_i \quad \forall i=1, \dots, n$$

Wir zeigen: $\text{Sol} = \langle [e^{\lambda_1 t}], \dots, [e^{\lambda_n t}] \rangle$

Zunächst: $\text{Sol} \subset \langle [e^{\lambda_1 t}], \dots, [e^{\lambda_n t}] \rangle$

($\Leftrightarrow (x \in \text{Sol} \Rightarrow x_i(t) = C_i e^{\lambda_i t}$ für eine reelle Zahl C_i)

G

Sei also $x \in \text{Sol}$, d.h. für jedes $i=1, \dots, n$ gilt: (9)

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda_i x_i. \quad \text{Dann gilt nach der Quotienten-}$$

regel der Ableitung:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x_i(t)}{e^{\lambda_i t}} \right) = \frac{x_i'(t) e^{\lambda_i t} - x_i(\lambda_i e^{\lambda_i t})}{e^{2\lambda_i t}}$$

$$\left[\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \right]$$

$$\stackrel{(**)}{=} \frac{\lambda_i x_i e^{\lambda_i t} - x_i \lambda_i e^{\lambda_i t}}{e^{2\lambda_i t}}$$

$$= 0, \text{ d.h.}$$

$$\left(\frac{x_i(t)}{e^{\lambda_i t}} \right)' = 0 \quad \text{und somit ist} \quad \frac{x_i(t)}{e^{\lambda_i t}}$$

$$\text{konstant, d.h. } \exists C_i \in \mathbb{R} \left(\frac{x_i(t)}{e^{\lambda_i t}} = C_i \right)$$

$$\Leftrightarrow \exists C_i \in \mathbb{R} \left(x_i(t) = C_i e^{\lambda_i t} \right). \quad \text{Da dies}$$

$$\text{für alle } i=1, \dots, n \text{ gilt, folgt } x \in \langle [e^{\lambda_1 t}], \dots, [e^{\lambda_n t}] \rangle$$

Bleibt zu zeigen:

$$\langle [e^{\lambda_1 t}], \dots, [e^{\lambda_n t}] \rangle \subset \text{Sol}. \quad \text{Sei also}$$

$x \in \langle [e^{\lambda_1 t}], \dots, [e^{\lambda_n t}] \rangle$. Dann gilt $\forall i \in \{1, \dots, n\}$:

$\exists C_i \in \mathbb{R}$, sodass $x_i(t) = C_i e^{\lambda_i t}$ und

(10)

$$\frac{d}{dt} x_i(t) = (C_i e^{\lambda_i t})' \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} C_i \lambda_i e^{\lambda_i t}, \text{ d.h.}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda_i x_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \text{ Somit folgt}$$

$$x'(t) = A x(t) \text{ f\"ur } A = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

was \"aquivalent zu $x \in \text{Sol}$ ist.

Insgesamt gilt also:

$$\text{Sol} = \langle [e^{\lambda_1 t}], \dots, [e^{\lambda_n t}] \rangle,$$

womit Sol nat\"urlich auch ein Vektorraum ist.