

Mathematics for Physicists II

Blatt 11 - Solutions

1

Exercise 1

(i): Wir nehmen an: $x_i \perp x_j$ falls $i \neq j$, d.h.

$$\langle x_i, x_j \rangle = 0.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|x_1 + \dots + x_n\|^2 &= \langle x_1 + \dots + x_n, x_1 + \dots + x_n \rangle \stackrel{\text{lin.}}{=} \\ &= \sum_{i \neq j} \underbrace{\langle x_i, x_j \rangle}_{=0 \text{ nach Annahme}} + \sum_{i=1}^n \langle x_i, x_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i, x_i \rangle \\ &= \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii): } \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle + \\ &\langle x-y, x-y \rangle \stackrel{\substack{\text{lin.} \\ \text{symm.}}}{=} [\langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle] + \\ &[\langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle] = 2\langle x, x \rangle + \\ &2\langle y, y \rangle = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \checkmark \end{aligned}$$

(iii): " $\Leftarrow$ ": Angenommen, $x=0$ oder $y=0$ oder $\|0\|=0$. Nehmen wir nun an, es gilt: $\exists \lambda > 0$, sodass $x = \lambda \cdot y$. Dann:

(2)

$\gamma=0$, dann gilt $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, da $\|0\|=0$. Nehmen wir nun an, es gilt: $\exists \lambda > 0$, sodass

$x = \lambda \cdot y$. Dann:

$$\|x+y\| = \|\lambda y + y\| = \|(\lambda+1) \cdot y\| = |\lambda+1| \|y\|$$

$$\stackrel{\lambda > 0}{=} (\lambda+1) \|y\|, \text{ aber auch}$$

$$\|x\| + \|y\| = \|\lambda y\| + \|y\| = |\lambda| \|y\| + \|y\|$$

$$= (|\lambda|+1) \|y\| \stackrel{\lambda > 0}{=} (\lambda+1) \|y\| \text{ (und somit}$$

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|). \quad \checkmark$$

" $\Rightarrow$ ": Umgekehrt, nehmen wir an $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$:

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow$$

$$\|x+y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \Leftrightarrow$$

$$\langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \Leftrightarrow$$

$$\langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\|x\|\|y\| +$$

$$+ \langle y, y \rangle \Leftrightarrow 2\langle x, y \rangle = 2\|x\|\|y\|$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$$

Nach einem Satz aus dem Skript (siehe
Cauchy-Ungleichung) gilt

(3)

$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$ genau dann, wenn
 x und y lin. abhängig sind.

Es gilt $|\langle x, y \rangle| = \langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\|$ und

somit: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, sodass $x = \lambda \cdot y$.

Bleibt zu zeigen: Falls $x \neq 0$ und $y \neq 0$, so
ist λ positiv. Das gilt, da:

$$\underbrace{\|x\| \|y\|}_{>0} = \langle x, y \rangle = \langle \lambda y, y \rangle = \lambda \underbrace{\langle y, y \rangle}_{>0} = \lambda \|y\|^2$$

Somit $x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow \lambda > 0$. ✓

(iv): Setze: $A = x - y$ & $B = y$.

Es gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$\Leftrightarrow \|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

G

$$\Leftrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

④

Genauso sieht man: $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$ und

damit insgesamt

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

(v): $\|x\| - \|y\| \leq |\|x\| - \|y\||$ ist trivial,

$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\|$ erhält man aus

(iv), indem man in (iv) $y := -y$ setzt.

Exercise 3(iii).

(iii): Setze $X := \mathbb{R}^2$, $Y := \{(t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Dann gilt:

- $Y \perp X$

- $Y^\perp = Y$, denn:

$$0 = \langle (x, s), (t, t) \rangle = x \underline{t} - s \underline{t} = (x - s)t, \text{ d.h.}$$

$$(x, s) \in Y^\perp \Leftrightarrow (x - s) = 0 \Leftrightarrow x = s$$

$$\Leftrightarrow (x, s) \in Y. \text{ Somit gilt } Y + Y^\perp = Y \neq X.$$

(siehe auch: Exercise 5 auf Blatt 10).

Exercise 2.

(5)

Um den Beweis von Thm. 4.2.2. zu vervollständigen, müssen wir insgesamt zeigen:

$$(*) : \langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle \quad \forall a \in \mathbb{R}, x, y \in X$$

Beweisidee: Wir zeigen $(*)$ für rationale

Zahlen $q \in \mathbb{Q}$ und benutzen dann, dass

(i): jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ durch eine rationale Folge $(q_n)_n \subset \mathbb{Q}$ approximiert werden kann

(d.h. $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$)

(ii): das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ stetig ist

um $(*)$ zu beweisen.

Beweis: • Zeige $(*)$ für rationale Zahlen:

Wir haben im Skript bereits gezeigt:

$$\langle x+z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle \quad \forall x, y, z \in X$$

für $z := x$ also: $\langle 2x, y \rangle = 2 \langle x, y \rangle$.

G

Induktiv erhalten wir damit

⑥

$$\bullet \langle nx, y \rangle = \langle \underbrace{x + \dots + x}_{n\text{-mal}}, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, y \rangle =$$

$= n \langle x, y \rangle$. Des Weiteren gilt:

$$\bullet \langle \frac{1}{n} x, y \rangle = \frac{1}{n} \langle x, y \rangle, \text{ denn:}$$

$$\langle x, y \rangle = \langle n \cdot \frac{1}{n} x, y \rangle = n \langle \frac{1}{n} x, y \rangle$$

$$\Leftrightarrow \frac{\langle x, y \rangle}{n} = \langle \frac{1}{n} x, y \rangle.$$

$$\Rightarrow \langle \frac{m}{n} x, y \rangle = m \langle \frac{1}{n} x, y \rangle = \frac{m}{n} \langle x, y \rangle$$

$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad \forall x, y \in X$ und damit

$$\langle q \cdot x, y \rangle = q \langle x, y \rangle \quad \forall q \in \mathbb{Q} \quad \forall x, y \in X.$$

• Sei nun $a \in \mathbb{R}$. Dann $\exists (q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$, sodass

$q_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ und es gilt

$$\langle q_n \cdot x, y \rangle = q_n \langle x, y \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \langle x, y \rangle.$$

Zu zeigen bleibt also:

(7)

$$\langle q_n x, y \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle ax, y \rangle, \text{ dann}$$

gilt $a \langle x, y \rangle = \langle ax, y \rangle$, da die konvergente Folge $\langle q_n x, y \rangle$ einen eindeutigen Grenzwert haben muss.

Die Konvergenz

$$\langle q_n x, y \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle ax, y \rangle \text{ folgt}$$

aber aus der Stetigkeit von $\langle \cdot, y \rangle$

(benutze die Definition von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ über die Norm $\| \cdot \|$ und die Stetigkeit der Norm)

basis for that space. If we wish an orthonormal basis, then we divide these vectors by their norm, and thus obtain

$$\frac{A}{\|A\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 0, 1),$$

$$\frac{B'}{\|B'\|} = \frac{1}{\sqrt{42}}(4, -5, 0, 1),$$

$$\frac{C'}{\|C'\|} = \frac{1}{\sqrt{105}}(-4, -2, -7, 6),$$

as an orthonormal basis.

Theorem 2.3. Let V be a vector space over $\mathbf{R}$ with a positive definite scalar product, of dimension n . Let W be a subspace of V of dimension r . Let $W^\perp$ be the subspace of V consisting of all elements which are perpendicular to W . Then V is the direct sum of W and $W^\perp$, and $W^\perp$ has dimension $n - r$. In other words,

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V.$$

Proof. If W consists of O alone, or if $W = V$, then our assertion is obvious. We therefore assume that $W \neq V$ and that $W \neq \{O\}$. Let $\{w_1, \dots, w_r\}$ be an orthonormal basis of W . By Theorem 2.1, there exist elements $u_{r+1}, \dots, u_n$ of V such that

$$\{w_1, \dots, w_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$$

is an orthonormal basis of V . We shall prove that $\{u_{r+1}, \dots, u_n\}$ is an orthonormal basis of $W^\perp$.

Let u be an element of $W^\perp$. Then there exist numbers $x_1, \dots, x_n$ such that

$$u = x_1 w_1 + \dots + x_r w_r + x_{r+1} u_{r+1} + \dots + x_n u_n.$$

Since u is perpendicular to W , taking the product with any w_i ($i = 1, \dots, r$), we find

$$0 = \langle u, w_i \rangle = x_i \langle w_i, w_i \rangle = x_i.$$

Hence all $x_i = 0$ ($i = 1, \dots, r$). Therefore u is a linear combination of $u_{r+1}, \dots, u_n$.

Conversely, let $u = x_{r+1} u_{r+1} + \dots + x_n u_n$ be a linear combination of $u_{r+1}, \dots, u_n$. Taking the product with any w_i yields 0. Hence u is perpendicular to all w_i ($i = 1, \dots, r$), and hence is perpendicular to W . This

We summarize the procedure of Theorem 2.1 once more. Suppose we are given an arbitrary basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ of V . We wish to orthogonalize it. We proceed as follows. We let

$$\begin{aligned} v'_1 &= v_1, \\ v'_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1, \\ v'_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, v'_2 \rangle}{\langle v'_2, v'_2 \rangle} v'_2 - \frac{\langle v_3, v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1, \\ &\vdots \\ v'_n &= v_n - \frac{\langle v_n, v'_{n-1} \rangle}{\langle v'_{n-1}, v'_{n-1} \rangle} v'_{n-1} - \dots - \frac{\langle v_n, v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1. \end{aligned}$$

Then $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ is an orthogonal basis.

Given an orthogonal basis, we can always obtain an orthonormal basis by dividing each vector by its norm.

Example 1. Find an orthonormal basis for the vector space generated by the vectors $(1, 1, 0, 1)$, $(1, -2, 0, 0)$, and $(1, 0, -1, 2)$.

Let us denote these vectors by A , B , C . Let

$$B' = B - \frac{B \cdot A}{A \cdot A} A.$$

In other words, we subtract from B its projection along A . Then B' is perpendicular to A . We find

$$B' = \frac{1}{3}(4, -5, 0, 1).$$

Now we subtract from C its projection along A and B' , and thus we let

$$C' = C - \frac{C \cdot A}{A \cdot A} A - \frac{C \cdot B'}{B' \cdot B'} B'.$$

Since A and B' are perpendicular, taking the scalar product of C' with A and B' shows that C' is perpendicular to both A and B' . We find

$$C' = \frac{1}{7}(-4, -2, -7, 6).$$

The vectors A , B' , C' are non-zero and mutually perpendicular. They lie in the space generated by A , B , C . Hence they constitute an orthogonal

Exercise 3

(8)

(ii): • Bemerke zunächst

$$Y \perp X \Rightarrow Y^\perp \subseteq X \quad (\text{orth. Kompl. ist ein Unter-raum von } X)$$

• Wir zeigen

$$Y \cap Y^\perp = \{0\} \quad \& \quad X = Y + Y^\perp$$

$$(\Leftrightarrow X = Y \oplus Y^\perp)$$

(i): $Y \cap Y^\perp = \{0\}$, denn:

Sei $x \in Y \cap Y^\perp$. Dann $x \in Y$ & $x \in Y^\perp$,

somit $x \perp x$, d.h. $\langle x, x \rangle = 0$.

$$\begin{array}{c} \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ pos.} \\ \xRightarrow{\text{definit}} \end{array} \quad x = 0, \text{ d.h. } \underset{\text{O}}{Y} \cap \underset{\text{O}}{Y^\perp} = \{0\}$$

(ii): $Y + Y^\perp = X$, denn:

$\dim(Y) = r$, sei also $\{y_1, \dots, y_r\} =: B_Y$
eine orthogonale Basis von Y (existiert nach
Korollar 4.2.5). Desweiteren, sei $B_{X \ominus Y}$

9
Sei $B_X := \{y_1, \dots, y_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ eine
orthogonale Basis von X (existiert nach
Theorem 4.2.4 (Basisergänzungssatz für orthogonale
Basen)).

Wir zeigen: $\langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle = Y^\perp$ (somit folgt
sogar, dass man jedes Element von X als Summe
von einem Element aus Y und einem Element aus $Y^\perp$
darstellen kann).

• $\langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle \subset Y^\perp$, denn:

$$v_i \perp y_j \quad \forall i = r+1, \dots, n \quad \forall j = 1, \dots, r \quad \text{und damit}$$

$$v_i \perp \langle y_1, \dots, y_r \rangle = Y \quad \forall i = r+1, \dots, n, \text{ d.h.}$$

$v_{r+1}, \dots, v_n \in Y^\perp$. Somit folgt (da $Y^\perp$
ein Untervektorraum ist) $\langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle \subset Y^\perp$.

• Umgekehrt gilt: $Y^\perp \subset \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle$, denn:

$$\text{Sei } x \in Y^\perp, x = \sum_{i=1}^r \beta_i y_i + \sum_{j=r+1}^n \lambda_j v_j. \text{ Es gilt:}$$



$$\langle x, y_k \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \sum \beta_i y_i + \sum \lambda_j v_j, y_k \rangle = 0 \quad (10)$$

$x \in Y^\perp$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^r \beta_i \underbrace{\langle y_i, y_k \rangle}_{=0, \text{ falls } i \neq k} + \sum_{j=r+1}^n \lambda_j \underbrace{\langle v_j, y_k \rangle}_{=0 \text{ } \forall j, \text{ da } v_j \perp y_i} = 0$$

$\{y_1, \dots, y_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$

$\Leftrightarrow$
orth. Basis

$$\beta_k \underbrace{\langle y_k, y_k \rangle}_{= \|y_k\|^2 > 0} = 0 \Leftrightarrow \beta_k = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta_k = 0$$

Dies gilt für jedes $k \in \{1, \dots, r\}$ und somit

$$x = 0 + \sum_{j=r+1}^n \lambda_j v_j, \text{ d.h. } x \in \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle$$

Es gilt also $Y^\perp \subset \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle$,

insgesamt haben wir gezeigt $Y^\perp = \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle$
und somit $X = Y + Y^\perp$. ✓

Exercise 4

(13)

Bem. Aus Prop. 4.2.3(i) wissen wir, dass

$\{v_1, \dots, v_n\}$ lin. unabhängig ist und

aus Prop. 4.2.3(iv) wissen wir:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(x)^2 \leq \|x\|^2$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\langle x, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle^2$$

" $\Rightarrow$ ": Wir nehmen also an $\sum_{i=1}^n \lambda_i(x)^2 = \|x\|^2$ und wollen zeigen, dass $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine (orthogonale) Basis ist.

Es gilt (siehe Beweis von Prop. 4.2.3(iii)):

$$(*) \quad \|x\|^2 = \left\| x - \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) v_i \right\|^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i(x)^2}_{= \|x\|^2 \text{ nach Annahme}}$$

$$\Leftrightarrow \left\| x - \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) v_i \right\|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) v_i = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) v_i$$

(A)

Daraus folgt $x \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ und somit, (14)
da $v_1, \dots, v_n$ lin. unabhängig sind, ist $\{v_1, \dots, v_n\}$
eine Basis von X .

" $\Leftarrow$ ": Umgekehrt, nehmen wir an $\{v_1, \dots, v_n\}$ bilden
eine Basis von X . Sei also $x \in X$, dann existieren
 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, sodass

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \iff \|x - \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\| = 0.$$

Nach Prop. 4.2.3 (iii) gilt nun

$$0 \leq \|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) v_i\| \leq \|x - \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\| = 0$$

$$\implies \|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) v_i\| = 0$$

$$\iff x = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) v_i$$

In (*) eingesetzt erhalten wir:

$$\|x\|^2 = \underbrace{\|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) v_i\|^2}_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i(x)^2$$

$$\iff \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x)^2 \quad \text{was zu zeigen war.} \quad \checkmark$$

Exercise 5

11

(i): Die i -te Zeile des linearen Gleichungssystems aus a)

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = 0 \quad \text{ist geg.}$$

durch das folgende:

$$\langle A_i, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rangle = 0, \text{ wobei}$$

A_i die i -te Zeile der Matrix A ist und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

(ii): Nach Exercise 3(ii) gilt:

$$\mathbb{R}^n = \langle A_1, \dots, A_m \rangle \oplus$$

$$\oplus \langle A_1, \dots, A_m \rangle^\perp$$

G

Wir bemerken:

(12)

Sol_0 , der Raum der Lösungen des Gleichungssystems aus (i) a) ist das orthogonale Komplement von $\langle A_1, \dots, A_m \rangle$, denn nach (i) gilt:

$$x \in \text{Sol}_0 \Leftrightarrow x \perp A_i \quad \forall i=1, \dots, m \\ (\Leftrightarrow x \perp \langle A_1, \dots, A_m \rangle)$$

Somit können wir schreiben:

$$\mathbb{R}^n = \langle A_1, \dots, A_m \rangle \perp \text{Sol}_0 \quad \text{und}$$

$$\text{damit} \quad \underbrace{\dim(\mathbb{R}^n)}_{=n} = \underbrace{\dim(\langle A_1, \dots, A_m \rangle)}_{=: r\text{Rank}} + \dim(\text{Sol}_0)$$

$$\Rightarrow r\text{Rank}(A) = n - \dim(\text{Sol}_0).$$

Es bleibt zu bemerken $\text{Sol}_0 = \text{Ker}(T_A)$, wobei

$T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, geg. durch $T_A(x) = A \cdot x$, d.h.

$$r\text{Rank}(A) = n - \dim(\text{Ker}(T_A)) = c\text{Rank}(A)$$

(nach Exercise 2, Blatt 9)