

Mathematics for Physicists II (1)

Blatt 10 - Solutions

Exercise 1

(i): Benutze Teil (i) von Prop. 3.3.8 aus dem Skript (zwei mal).

(ii): Benutze Teil (ii) von Prop. 3.3.8 aus dem Skript (zwei mal).

Exercise 2

(i): Wir nehmen an, T sei diagonalisierbar, d.h. $\exists$ Basis C_X von X , sodass

$A_{T_{C_X}}$ eine Diagonalmatrix ist. Dann gilt nach Theorem 3.3.11 aus dem Skript: $A_{T_{C_X}}$ und $A_{T_{B_X}}$ sind ähnlich, d.h. $\exists$ invertierbare Matrix B , sodass

$$A_{T_{C_X}} = B^{-1} A_{T_{B_X}} B. \quad \square$$

Umgekehrt, nehmen wir an, es gibt ②
eine invertierbare Matrix B , sodass
 $B^{-1}A^TB_X B$ diagonal ist. Dann gibt
es eine Basis C_X von X , sodass

$$B = A(\text{id}_X)C_X B_X \quad (\text{und somit}$$

$$B^{-1} = A(\text{id}_X)B_X C_X). \quad \text{Daraus folgt sofort}$$

$$B^{-1}A^TB_X B = A(\text{id}_X)B_X C_X A^TB_X A(\text{id}_X)C_X B_X \\ = A^TC_X \quad \text{und damit ist}$$

$$A^TC_X \text{ diagonal.}$$

Exercise 2 (II): Für $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$: (3)

$A \sim A' \Leftrightarrow \exists$ invertierbare Matrix $B \in M_n(\mathbb{R})$:

$$B^{-1}AB = A'$$

Wir zeigen: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

• $\sim$ ist reflexiv: $A \sim A$, da $\overset{-1}{I_n} A \overset{-1}{I_n} = A$

• $\sim$ ist symmetrisch: $A \sim A' \Rightarrow A' \sim A$, denn

$$\begin{aligned} A' = B^{-1}AB &\Rightarrow BA'B^{-1} = B(B^{-1}AB)B^{-1} \\ &\quad \parallel \\ &\quad (BB^{-1})A(BB^{-1}) \\ &\quad \parallel \\ &\quad I_n A I_n = A \end{aligned}$$

• $\sim$ ist transitiv: $(A \sim A' \ \& \ A' \sim A'') \Rightarrow A \sim A''$, denn

seien $A' = B^{-1}AB$ und $A'' = C^{-1}A'C$, dann:

$$\begin{aligned} A'' &= C^{-1}A'C = C^{-1}(B^{-1}AB)C = (C^{-1}B^{-1})A(BC) \\ &= (BC)^{-1}A(BC) \text{ und somit } A \sim A''. \end{aligned}$$

Exercise 3

$$\langle 0 \cdot 0, x \rangle$$

(4)

(i): $\forall x \in X$ gilt $\langle 0, x \rangle \stackrel{\text{lin.}}{=} 0 \cdot \langle 0, x \rangle$.

(ii): Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit, d.h.

$\langle x, x \rangle > 0$ für alle $x \neq 0$. Dann gilt

(nach i)) $\langle x, x \rangle \geq 0$, d.h. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist positiv.

Des Weiteren: Angenommen $\exists x^* \in X$, sodass

$\forall z \in X \langle z, x^* \rangle = 0$. Dann gilt insbesondere

$\langle x^*, x^* \rangle = 0$ und somit (da $\langle x, x \rangle > 0$ für $x \neq 0$)

$x^* = 0$. D.h., wir haben gezeigt:

$\rightarrow \forall x \in X (\forall z \in X \langle z, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0)$
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nicht-degeneriert.

(iii): Benutze Linearität und Symmetrie von $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\frac{1}{4} (\langle x+y, x+y \rangle - \langle x-y, x-y \rangle) =$$

G

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} [(\langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle) - \quad (5) \\
 & (\langle x, x \rangle - \langle y, x \rangle - \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle)] \\
 &= \frac{1}{4} [2\langle y, x \rangle + 2\langle x, y \rangle] = \frac{1}{4} (4\langle x, y \rangle) \\
 &= \langle x, y \rangle.
 \end{aligned}$$

(iv): Sei $Q_{\langle \cdot, \cdot \rangle}(x) = Q_{\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle}(x)$
 für jedes $x \in X$. Dann gilt: $\forall x, y \in X$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} (Q_{\langle \cdot, \cdot \rangle}(x+y) - Q_{\langle \cdot, \cdot \rangle}(x-y)) \\
 &= \frac{1}{4} (Q_{\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle}(x+y) - Q_{\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle}(x-y))
 \end{aligned}$$
 und somit nach Teil (iii):

$$\langle x, y \rangle = \langle\langle x, y \rangle\rangle \quad \forall x, y \in X.$$

Exercise 4 $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}^+$

(6)

(i): $\bullet \|X\|=0 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = 0$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0$$

$$\bullet \|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + \dots + (\lambda x_n)^2}$$

$$= \sqrt{\lambda^2 (x_1^2 + \dots + x_n^2)}$$

$$= \sqrt{\lambda^2} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = |\lambda| \cdot \|x\|$$

• Für die Dreiecksungleichung, benutze die

Ungl. von Cauchy:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

$$\Leftrightarrow \langle x+y, x+y \rangle \leq \langle x, x \rangle + 2\|x\|\|y\| + \langle y, y \rangle$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle}_{\langle x+y, x+y \rangle} \leq \langle x, x \rangle + 2\|x\|\|y\| + \langle y, y \rangle$$

$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \leq \|x\|\|y\|$. Diese letzte Ungleichung aber gilt direkt nach Cauchy:

$$\langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

Insgesamt folgt also, dass $\|\cdot\|$ eine Norm ist.

- (ii):
- Linearität und Symmetrie sind klar
 - Minkowski-Produkt ist indefinit:
($\langle \cdot, \cdot \rangle$)

(7)

Sei $x \in \mathbb{R}^3, x \neq 0$, dann gilt: $\tilde{x}$ ist „space-like“,
d.h. $(x_1, x_2, x_3, 0) \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} Q(\tilde{x}) &= \langle (x_1, x_2, x_3, 0), (x_1, x_2, x_3, 0) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^3 x_i^2 - 0 \cdot 0 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 > 0. \end{aligned}$$

Sei $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$, dann gilt: $\tilde{t}$ ist „time-like“,
d.h. $(0, 0, 0, t) \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} Q(\tilde{t}) &= \langle (0, 0, 0, t), (0, 0, 0, t) \rangle = \\ &= 0 - t^2 = -t^2 < 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Minkowski-Produkt ist indefinit.

• Nicht-Degeneriert: Sei
 $(x, s) = (x_1, x_2, x_3, s) \in \mathbb{R}^4$. Angenommen, es gilt:

$$\langle (x, s), (y, t) \rangle = 0 \quad \forall (y, t) = (y_1, y_2, y_3, t),$$

$\uparrow$
 $\mathbb{R}^4$

d.h.

$$\sum_{i=1}^3 x_i y_i - st = 0 \quad \forall y_1, y_2, y_3, t \in \mathbb{R}.$$

(8)

Dann gilt insbesondere:

$$0 = \langle (x, s), (0, 1) \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot 0 - s \cdot 1 = -s, \text{ d.h.}$$

$s = 0$. Zu zeigen bleibt: $x_1, x_2, x_3 = 0$.

Nach Annahme gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (x, s), \overbrace{(1, 0, 0, t)}^{x_1 - st} \rangle = \langle (x, s), \underbrace{(0, 1, 0, t)}_{x_2 - st} \rangle = \\ &= \underbrace{\langle (x, s), (0, 0, 1, t) \rangle}_{x_3 - st}, \text{ d.h.} \end{aligned}$$

$$0 = x_1 - st = x_2 - st = x_3 - st$$

$$\stackrel{s=0}{\iff} 0 = x_1 = x_2 = x_3.$$

Damit haben wir gezeigt, dass $(x, s) = 0 \in \mathbb{R}^4$ folgt und somit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nicht-degeneriert ist.

(iii): Seien $x, y \in \mathbb{R}^4$ „time-like“, d.h. es gelte (9)

$Q(x) < 0, Q(y) < 0$. Dann gilt eine „umgekehrte Cauchy-Ungleichung“:
 $\langle x, x \rangle \quad \langle y, y \rangle$

$$\langle x, y \rangle^2 \geq \langle y, y \rangle \langle x, x \rangle,$$

z.B. seien

$$x = (0, 0, 0, 1) \text{ \& \; } y = (1, 1, 0, \sqrt{3}), \text{ dann}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{gilt } Q(x) = 0 - 1 = -1 \\ Q(y) = 1^2 + 1^2 - \sqrt{3}^2 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x, y \\ \text{„time-like“} \end{array}$$

und

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 1 \cdot \sqrt{3} \\ &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle^2 = 3 \geq 1 = Q(x)Q(y).$$

Die Cauchy-Ungleichung gilt für x und y also nicht (was möglich ist, da das Minkowski-Produkt nicht positiv definit ist).

Exercise 5

(9)

Seien x, y "light-like" bzgl. des Minkowski-Produkts, d.h. $Q(x) = Q(y) = 0$.

$$\sum_{i=1}^3 x_i^2 - t^2 \text{ \& } \sum_{i=1}^3 y_i^2 - s^2, \text{ falls } \begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3, t) \\ y = (y_1, y_2, y_3, s) \end{cases}$$

" $\Leftarrow$ ": Zeigen zuerst: " x, y linear abhängig" impliziert " x, y orthogonal".

Angenommen x und y sind lin. abh., d.h.

$$y = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda t) \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \sum_{i=1}^3 x_i y_i - st = \sum_{i=1}^3 x_i \lambda x_i - \lambda t \cdot t \\ &= \lambda \left(\underbrace{\sum_{i=1}^3 x_i^2 - t^2}_{= Q(x) = 0} \right) = 0, \text{ d.h. } x \perp y \end{aligned}$$

" $\Rightarrow$ ": Nehmen wir nun umgekehrt an, $x \perp y$ (x und y orthogonal). Zu zeigen ist: x und y sind lin. abhängig. $\square$

$$\underbrace{\langle x, y \rangle}_{= \sum_{i=1}^3 x_i y_i - ts} = 0 \iff \sum_{i=1}^3 x_i y_i = ts$$

(10)

Es gilt also: $\left(\sum_{i=1}^3 x_i y_i\right)^2 = t^2 s^2$, aber auch

$$\underbrace{\sum_{i=1}^3 x_i^2}_{\iff Q(x)=0} = t^2 \quad \& \quad \underbrace{\sum_{i=1}^3 y_i^2}_{\iff Q(y)=0} = s^2, \text{ da } x, y \text{ "light-like" sind.}$$

$$\text{D.h., } \left(\sum_{i=1}^3 x_i y_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^3 y_i^2\right)$$

Dies ist die Cauchy-Ungleichung für $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ und $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ und das Euklidische Skalarprodukt mit einer Gleichheit. Nach dem Satz aus dem Skript (Cauchy-Ungleichung) gilt die Gleichheit genau dann, wenn $(x_1, \dots, x_3)$ und $(y_1, \dots, y_3)$ lin. abhängig sind, d.h.

$$(y_1, y_2, y_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Zu zeigen bleibt: $s = \lambda t$ und somit
"x und y sind lin. abh."



Es gilt also: $\gamma_i = \lambda x_i$, $i=1,2,3$

(11)

$$\sum_{i=1}^3 x_i \gamma_i = st \Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 \lambda x_i^2 = st$$

$$\Leftrightarrow \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^3 x_i^2}_{=t^2, \text{ da } x \text{ "light-like"}} = st$$

$$\Leftrightarrow \lambda t^2 = st$$

$$\Leftrightarrow t(\lambda t - s) = 0$$

Ang.: $t=0$, dann gilt $s=0$ und $\lambda t=s$.

Falls $t \neq 0$, so muss gelten:

$$(\lambda t - s) = 0 \Leftrightarrow s = \lambda t$$

und somit $\lambda \underset{''}{x} = \gamma (= (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, s))$
 $\lambda(x_1, x_2, x_3, t)$