

Exercise 1

(i) Annahme: $(f, g): S \approx T$ ((f, g) ist ein Iso-
morphismus), d.h.
 $(X, S) \cong (Y, T)$

$$\forall x \in X: g(f(x)) = x \quad \& \quad \forall y \in Y: f(g(y)) = y$$

Wir zeigen: 1) f ist injektiv:

Sei $f(x) = f(x')$ für $x, x' \in X$, dann gilt:

$$x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$$

2) f ist surjektiv:

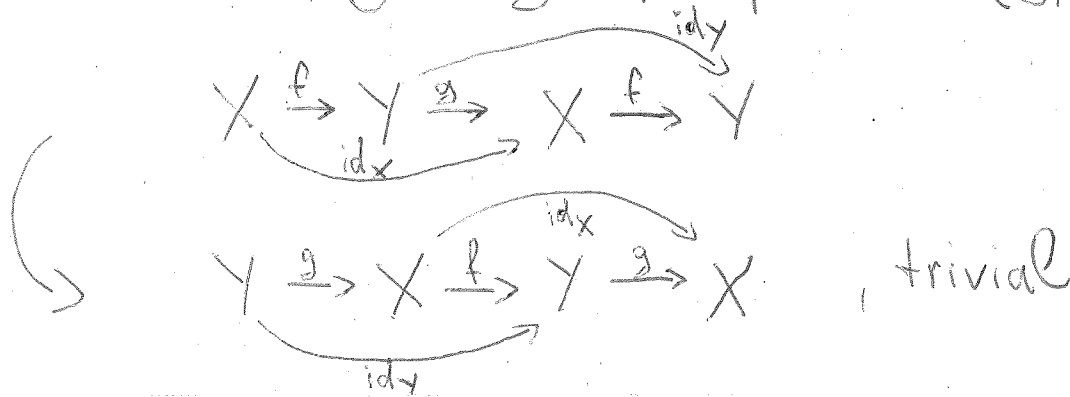
$$\forall y \in Y \exists x \in X: f(x) = y, \text{ da } \forall y \in Y: f(g(y)) = y$$

Analog zeigt man, dass g injektiv und surjektiv ist

(ii)

(a) $(\text{id}_X, \text{id}_X): S \approx S$, trivial

(b) $(f, g): S \approx T$ impliziert $(g, f): T \approx S$:



c) $(f, g): S \simeq T$ & $(f', g'): T \simeq U$ impliziert ⁽²⁾
 $(f' \circ f, g \circ g'): S \simeq U$: (Z, u)

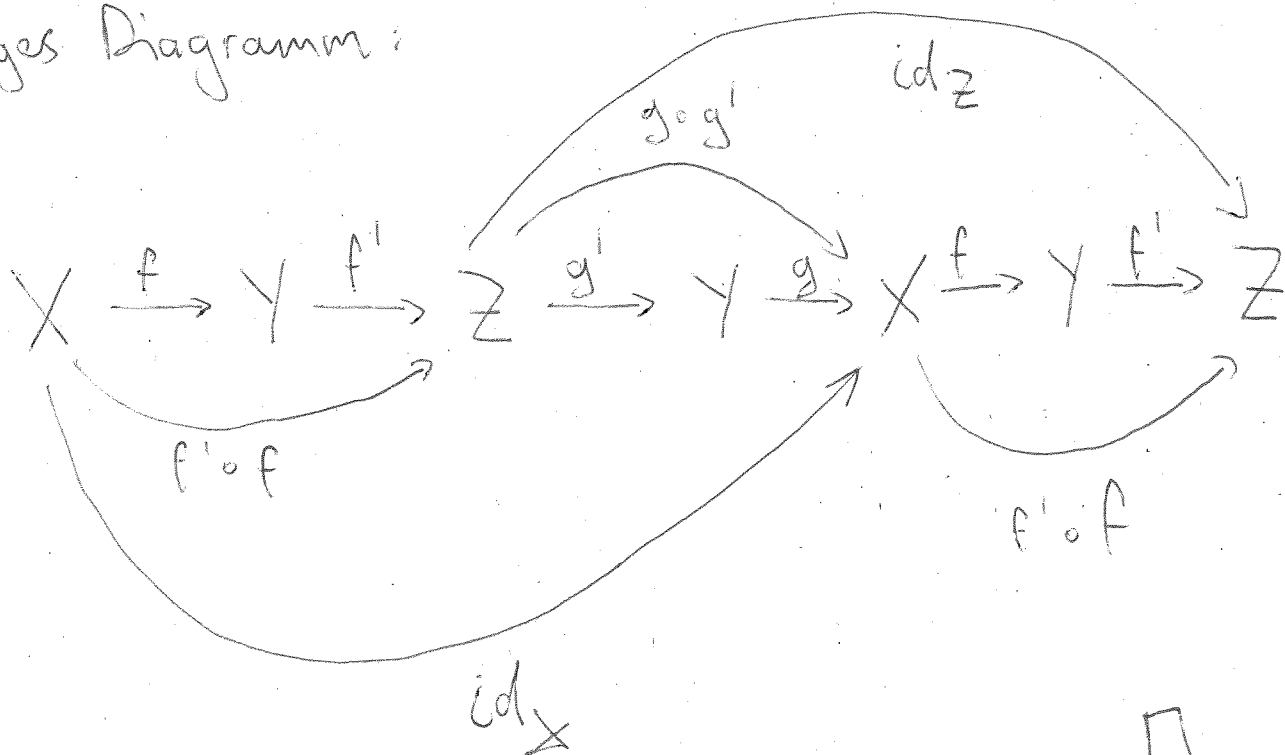
$$(g \circ g') \circ (f' \circ f) \stackrel{\text{Assoz.}}{=} (g \circ (g' \circ f')) \circ f$$

$$\stackrel{(f', g')}{\underset{\text{Isom.}}{=}} (g \circ \text{id}_Y) \circ f = g \circ f \stackrel{(f, g)}{\underset{\text{Isom.}}{=}} \text{id}_X \quad \text{und}$$

$$(f' \circ f) \circ (g \circ g') \stackrel{\text{Assoz.}}{=} (f' \circ (f \circ g)) \circ g'$$

$$\stackrel{(f, g)}{\underset{\text{Isom.}}{=}} (f' \circ \text{id}_Y) \circ g' = f' \circ g' \stackrel{(f', g')}{\underset{\text{Isom.}}{=}} \text{id}_Z$$

Zugehöriges Diagramm:



□

Exercise 2.

③

(1) Zeige, dass Rel eine Kategorie ist.

Γ_{Rel} : Objekte $A, B, \dots$ sind Mengen,
Pfeile $f: A \rightarrow B, \dots$ sind Teilmengen von
 $A \times B, \dots$, d.h. zweistellige Relationen.

Identität: $\text{id}_A := \{(a, b) \in A \times A \mid a = b\}$

Komposition: für $R \subset A \times B$ und $S \subset B \times C$ sei

$$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B: (a, b) \in R \ \& \ (b, c) \in S\} \subset A \times C.$$

1) id_A erfüllt die Voraussetzungen an die Identität,

d.h. für $R \subset A \times B$ $\text{id}_B \circ R = R = R \circ \text{id}_A$:

$$\begin{aligned} R \circ \text{id}_A &= \{(a, b) \in A \times B \mid \exists a' \in A: (a, a') \in \text{id}_A \\ &\& \ (a', b) \in R\} = \{(a, b) \in A \times B \mid \exists a' \in A: a = a' \ \& \ (a', b) \in R\} \\ &= \{(a, b) \in A \times B \mid (a, b) \in R\} \\ &= R. \quad (\text{Man zeigt } \text{id}_B \circ R = R \text{ analog.}) \end{aligned}$$

2) Zeige Assoziativität von $\circ$:

(4)

Seien $R \subset A \times B$, $S \subset B \times C$ und $T \subset C \times D$.

Zu zeigen: $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$

Beweis:

$$A \times C \supset S \circ R = \{ (a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a, b) \in R \ \& \ (b, c) \in S \}$$

$$B \times D \supset T \circ S = \{ (b, d) \in B \times D \mid \exists c \in C : (b, c) \in S \ \& \ (c, d) \in T \}$$

Damit können wir schreiben:

$$\begin{aligned} T \circ (S \circ R) &= \{ (a, d) \in A \times D \mid \exists c \in C : \\ &\underbrace{\underbrace{(a, c)}_{\subset C \times D} \underbrace{(c, d)}_{\subset C \times D}}_{\subset A \times D} \quad (a, c) \in S \circ R \ \& \ (c, d) \in T \} = \end{aligned}$$

$$= \{ (a, d) \in A \times D \mid \exists c \in C : (\exists b \in B : (a, b) \in R \ \& \ (b, c) \in S) \ \& \ (c, d) \in T \}$$

$$= \{ (a, d) \in A \times D \mid \exists c \in C \exists b \in B ((a, b) \in R \ \& \ (b, c) \in S \ \& \ (c, d) \in T) \}$$

$$\begin{aligned} \text{Analog gilt: } (T \circ S) \circ R &= \{ (a, d) \in A \times D \mid \exists b \in B : \\ &(a, b) \in R \ \& \ (b, d) \in T \circ S \} = \dots = \{ (a, d) \in A \times D \mid \\ &\exists b \in B \exists c \in C ((a, b) \in R \ \& \ (b, c) \in S \ \& \ (c, d) \in T) \} \quad \square \end{aligned}$$

Exercise 2

(5)

(ii) Zeige, dass Pos eine Kategorie ist.

Es reicht zu zeigen, dass die Identität und die Komposition zweier monotoner Funktionen monoton sind (Wahl der Identität und Assoziativität sind klar - wie in der Kategorie Set).

1) Sei $(X, \leq_X)$ eine mit einer Partialordnung versehene Menge, dann ist $\text{id}_X: (X, \leq_X) \rightarrow (X, \leq_X)$ monoton:

$$x' \leq_X x \Rightarrow \text{id}_X(x') = x' \leq_X x = \text{id}_X(x).$$

2) Seien $f: (X, \leq_X) \rightarrow (Y, \leq_Y)$ und $g: (Y, \leq_Y) \rightarrow (Z, \leq_Z)$ monotone Funktionen, dann gilt:

$$\begin{array}{l|l} x \leq_X x' & \text{da } g \text{ monoton und } f(x) \leq_Y f(x') \\ \hline \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(\underbrace{f(x)}_{\leq_Y f(x'), \text{ da } f \text{ monoton und } x \leq_X x'}) & \leq_Z g(\underbrace{f(x')}_{\text{" } g \circ f(x')}) \end{array}$$

D.h. $g \circ f$ ist monoton.

□

Exercise 3

⑥

(i) Zeige, dass $(F_0, F_1) : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Rel}$

$$F_0, A \mapsto A$$

$$F_1, A \xrightarrow{f} B \mapsto f \subset A \times B$$

ein kovarianter Funktor ist.

$$\begin{aligned} 1) F_1(\text{id}_A) &= \{ (a, b) \in A \times A \mid \text{id}_A(a) = b \} \\ &= \{ (a, b) \in A \times A \mid a = b \}, \text{ d.h.} \end{aligned}$$

F_1 bildet die Identität auf A in $\mathbf{Set}$ auf die Identität auf $F_0(A) = A$ in $\mathbf{Rel}$ ab. ✓

2) Seien $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$ Funktionen (Pfeile aus $\mathbf{Set}$), dann gilt

$$\begin{aligned} F_1(g \circ f) &= \{ (a, c) \in A \times C \mid g \circ f(a) = c \} \\ &= \{ (a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \quad f(a) = b \ \& \ g(b) = c \} \\ &= \{ (a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \quad (a, b) \in F_1(f) \ \& \ (b, c) \in F_1(g) \} \\ &= F_1(g) \circ F_1(f). \end{aligned}$$

$\overset{\text{"Gr(f)"}}{\square} \quad \overset{\text{"Gr(g)"}}{\square}$

Exercise 3

⑦

(II) Komposition von Funktoren:

C, D, E Kategorien, F, G Funktoren

$(F_0, F_1), (G_0, G_1)$

$$C \xrightarrow{F} D \xrightarrow{G} E$$

$$G \circ F : C \rightarrow E$$

Wir definieren die Komposition $G \circ F$ wie folgt:

$$(G \circ F)_0 = G_0 \circ F_0, \text{ d.h. } A \mapsto G_0(F_0(A))$$

$$(G \circ F)_1 = G_1 \circ F_1, \text{ d.h. } f \mapsto G_1(F_1(f))$$

$$C \xrightarrow{f} C'$$

$$\downarrow F$$

$$F_0(C) \xrightarrow{F_1(f)} F_0(C')$$

$$\downarrow G$$

$$G_0(F_0(C)) \xrightarrow{G_1(F_1(f))} G_0(F_0(C'))$$

Wir zeigen, $G \circ F : C \rightarrow E$ ist ein Funktor:



(8)

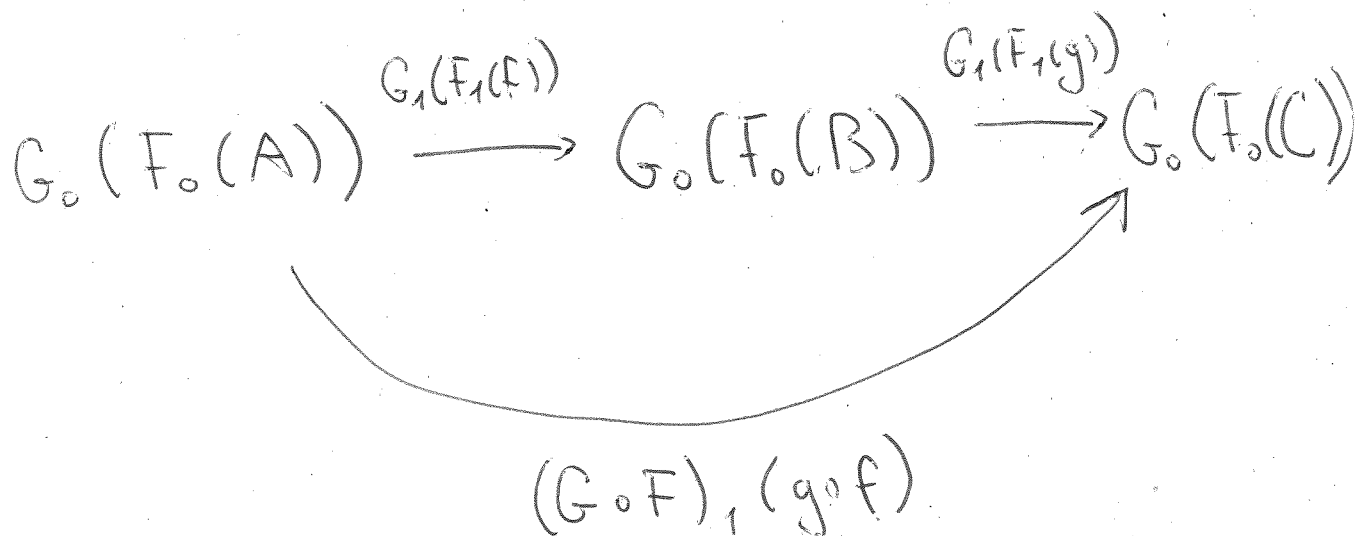
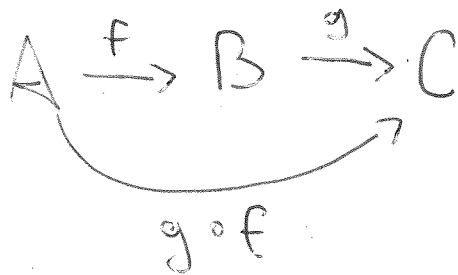
$$1) G_1(F_1(1_C)) = G_1(\mathbb{1}_{F_0(C)}) = \\ = \mathbb{1}_{G_0(F_0(C))} = \mathbb{1}_{(G \circ F)_0(C)} \quad \checkmark$$

$$2) (G \circ F)_1(g \circ f) = G_1(F_1(g \circ f))$$

$$\stackrel{F \text{ Funktor}}{=} G_1(F_1(g) \circ F_1(f)) \stackrel{G \text{ Funktor}}{=} G_1(F_1(g)) \circ G_1(F_1(f))$$

$$= (G \circ F)_1(g) \circ (G \circ F)_1(f) \quad \checkmark$$

Zugehöriges Diagramm (zu 2):



Exercise 4

(9)

(i) $H = (H_0, H_1) : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ ist ein Funktor

Γ Für eine Menge X , definiere $\{ \phi : X \rightarrow \mathbb{R} \} = X^*$.
Des Weiteren, sei $\hat{X} := \{ \psi : \{ \phi : X \rightarrow \mathbb{R} \} \rightarrow \mathbb{R} \} = (X^*)^*$.
Definiere $H = (H_0, H_1)$ und $G = (G_0, G_1)$ wie folgt:

• $G = (G_0, G_1) : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$, wobei

$G_0(X) = X^*$ und für $f : X \rightarrow Y$

$G_1(f) : Y^* \rightarrow X^*$ ist gegeben durch

$$[G_1(f)](g) = g \circ f \quad \forall g \in Y^*$$

• $H = (H_0, H_1) : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$, wobei

$H_0(X) = \hat{X}$ und für $f : X \rightarrow Y$

$H_1(f) : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$ ist gegeben durch

$$[H_1(f)](g) = g \circ G_1(f) \quad \forall g \in \hat{X}$$

H ist ein Funktor, denn

(10)

$$1) [H_1(\text{id}_X)](g) = g \circ G_1(\text{id}_X) = g \circ \text{id}_{X^*} = g$$

für alle $g \in \hat{X}$, d.h. $g: X^* \rightarrow \mathbb{R}$.

$$2) [H_1(f \circ f')](g) = g \circ G_1(f \circ f')$$
$$= g \circ (G_1(f') \circ G_1(f)) = (g \circ G_1(f')) \circ$$

$$G_1(f) = [H_1(f)](g) \circ G_1(f) = [H_1(f)]([H_1(f')](g))$$

$$= (H_1(f) \circ H_1(f'))(g) \quad \text{für alle } g \in \hat{X}$$

Zugehöriges Diagramm:

(zu 2))

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f'} & Y & \xrightarrow{f} & Z \\ & \searrow f \circ f' & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \hat{X} & \xrightarrow{H_1(f')} & \hat{Y} & \xrightarrow{H_1(f)} & \hat{Z} \\ & \searrow H_1(f \circ f') & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} f': X \rightarrow Y \\ f: Y \rightarrow Z \end{array}$$

ii)

(11)

$$\tau: \text{Id}_{\text{Set}} \Rightarrow H$$

$$\tau_X: X \rightarrow \hat{X}, \quad \forall x \in X \quad \tau_X(x) = \hat{x}, \quad \text{wobei } \hat{x} \in \hat{X}$$

gegeben ist durch: $\hat{x}(\phi) = \phi(x) \quad \forall \phi \in X^*$.

Das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \tau_X \downarrow & & \downarrow \tau_Y \\ \hat{X} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{Y} \end{array}, \text{ denn } \hat{f} := H_1(f)$$

• $(\tau_Y \circ f)(x) \in \hat{Y}$ ist gegeben durch

$$[(\tau_Y \circ f)(x)](g) = g(f(x)) \quad \forall g \in Y^* \text{ und}$$

• $(\hat{f} \circ \tau_X)(x) \in \hat{Y}$ ist gegeben durch

$$\hat{f}(\tau_X(x)) = [H_1(f)](\hat{x}) = \hat{x} \circ G_1(f)$$

und somit gilt

$$\begin{aligned} [(\hat{f} \circ \tau_X)(x)](g) &= \hat{x}([G_1(f)](g)) = \hat{x}(g \circ f) \\ &= g(f(x)) \quad \forall g \in Y^* \end{aligned}$$

□

Exercise 5

(12)

i) ~~94~~ Zeige, dass die in der Aufgabenstellung definierte Struktur $\mathcal{C}/A$ tatsächlich eine Kategorie ist.

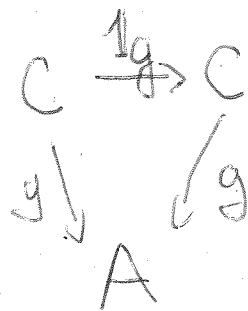
Sei α ein Pfeil in $\mathcal{C}/A$, $\alpha: g \rightarrow h$, wobei $g: C \rightarrow A$ und $h: D \rightarrow A$ in $\mathcal{C}$.

Dann gilt:

$$\alpha: C \rightarrow D$$

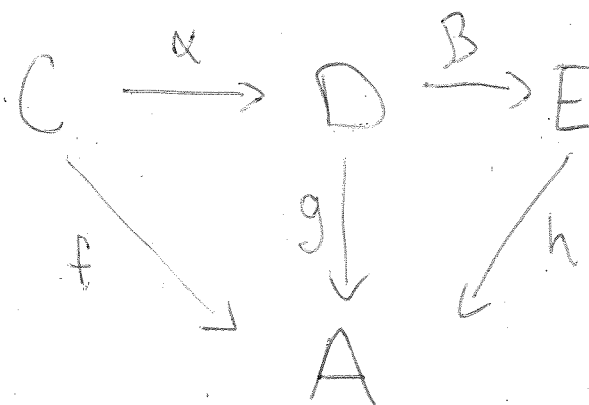


• Definiere Identität:



$$, d.h. \quad 1g = id_C$$

• Definiere Komposition:



$$\beta \circ \alpha: f \rightarrow h$$

Pfeil in $\mathcal{C}/A$
ist gegeben durch

$$\beta \circ \alpha: C \rightarrow E$$

Pfeil in $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$

(i) Aus den Definitionen ergibt sich direkt

(13)

$$\alpha \circ 1_g = \alpha = 1_f \circ \alpha$$

und die Assoziativität der Komposition, d.h.

$\mathcal{C}/A$ ist eine Kategorie.

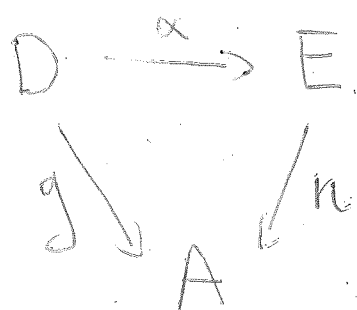
(ii) Für $f: A \rightarrow B$ Pfeil in $\mathcal{C}$ definiere Funktor F durch:

$$F = (F_0, F_1) \quad \mathcal{C}/A \rightarrow \mathcal{C}/B, \text{ wobei}$$

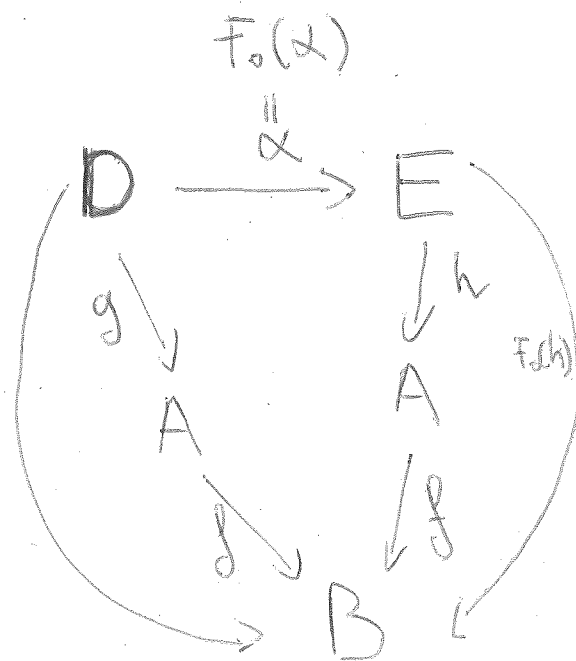
$$F_0(D \xrightarrow{g} A) := f \circ g \quad (D \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} B)$$

$$\text{und } F_1(g \xrightarrow{\alpha} h) = \alpha.$$

Zugehöriges Diagramm



$\mapsto$
 $F_0(g)$



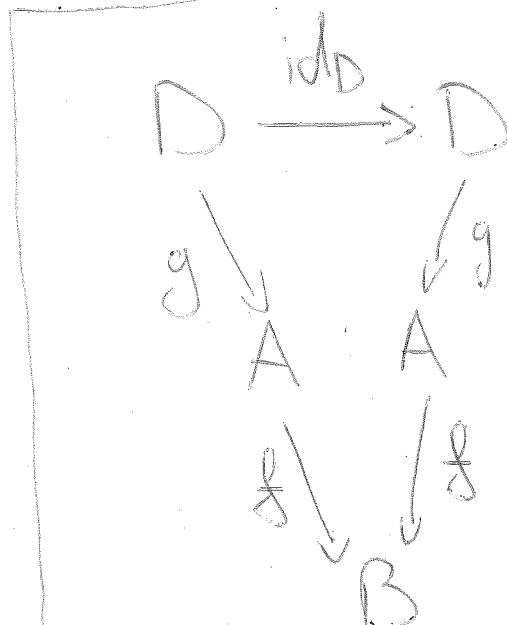
Wir zeigen, dass F tatsächlich ein Funktor ist:

$\mathcal{C}$

$$F_1(1_g) = F_1(\text{id}_D) = \text{id}_D$$

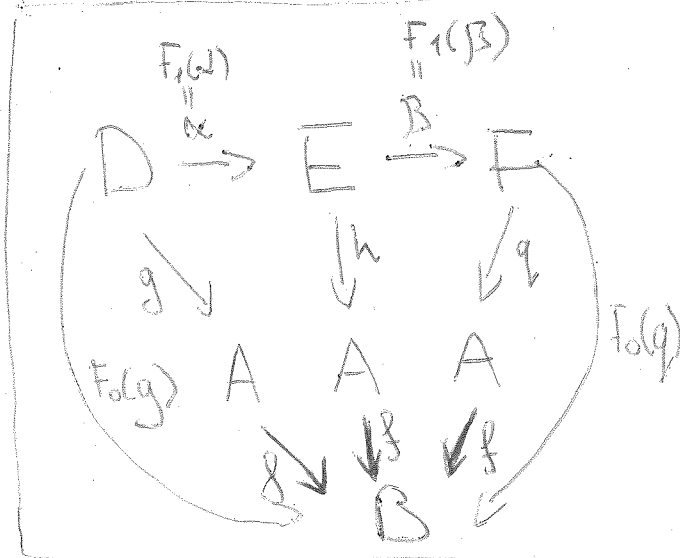
und $1_{F_0(g)} = 1_{(f \circ g)} = \text{id}_D$, sodass

$$F_1(1_g) = 1_{F_0(g)}$$



$$F_1(\beta \circ \alpha) = \beta \circ \alpha$$

$$= \underbrace{F_1(\beta)}_{:= \beta} \circ \underbrace{F_1(\alpha)}_{:= \alpha}$$



Somit ist $F = (F_0, F_1) : \mathcal{C}/A \rightarrow \mathcal{C}/B$
ein Funktor.