Klausur zur Linearen Algebra II – Lösungen

Aufgabe 1: Für $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sei $A = xy^T \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Bestimmen Sie zunächst den Rang und dann die Eigenwerte von A.

Lösung:

$\operatorname{rk} A = 1$, da alle Spalten Vielfache von x sind und damit linear abhängig. Damit hat $\ker A$ die Dimension 3, d.h. 0 ist Eigenwert mit geometrischer Vielfachheit 3. Insbesondere ist 0 dreifache Nullstelle von χ_A, so dass das charakteristische Polynom

$$\chi_A = X^3(X - \lambda) = X^4 - \lambda X^3$$

gelten muss. Aus der allgemeinen Form des charakteristischen Polynoms folgt $\lambda = \operatorname{Tr} A = x^T y = 8 - 6 - 2 + 1 = 1$. Also sind 0 und 1 die beiden einzigen Eigenwerte. $\square$

Alternativ kann man natürlich auch xy^T ausrechnen:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -8 & -4 & 4 \\ 6 & -6 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich für das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \chi_A = \begin{vmatrix} X-8 & 8 & 4 & -4 \\ -6 & X+6 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & X+2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & X-1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & -4X \\ 0 & X & 0 & -3X \\ 0 & 0 & X & -2X \\ -2 & 2 & 1 & X-1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & 0 \\ -2 & 2 & 1 & X-1-8+6+2 \end{vmatrix} = X^3(X-1) \end{aligned}$$

Dabei wird im ersten Schritt die unterste Zeile vierfach von der ersten, dreifach von der zweiten und doppelt von der dritten abgezogen. Im zweiten Schritt wird die erste Spalte vierfach, die zweite Spalte dreifach und die dritte Spalte doppelt zur letzten Spalte addiert.

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von χ_A, also 0 und 1.

Weitere Alternative: Für alle v ist (mit dem Standardskalarprodukt)

$$Av = (xy^T)v = x(y^T v) = \langle y, v \rangle x \in \mathbb{R}x\,. \tag{*}$$

Man sieht daraus, dass $\ker A = \langle x \rangle^\perp$, also ist

$$\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im} A = 1$$

und 0 ist Eigenwert mit geometrischer Vielfachheit 3. Außerdem folgt durch Einsetzen von $v = x$ in (*), dass x Eigenvektor ist mit Eigenwert $\langle y, x \rangle = 1$.

Hinweis: Zur Berechnung des Ranges kann man A durch Zeilenäquivalenz-Umformungen zu einem A' vereinfachen. Doch **Vorsicht:** *Zeilenäquivalente* Matrizen sind im Allgemeinen nicht *ähnlich* und können daher verschiedene charakteristische Polynome haben ($\chi_A \neq \chi_{A'}$). Je nachdem, wie umgeformt wird, kommt in dieser Aufgabe (zufälligerweise) doch ein ähnliches A' heraus. Wenn die Ähnlichkeit aber nicht begründet wird, ist diese Lösung nicht korrekt (auch wenn die richtigen Eigenwerte herauskommen).

Bewertung: Die richtige Bestimmung des Ranges gibt 2 Punkte, außerdem jeweils 2 Punkte für die Bestimmung der Eigenwerte und den Nachweis, dass es keine weiteren Eigenwerte gibt (z.B. über Dimension der Eigenräume oder charakteristisches Polynom). Werden ohne (oder mit falscher) Begründung die Eigenwerte einer zeilenäquivalenten Matrix bestimmt, gibt dies nur einen halben Punkt. Nicht nachvollziehbare Umformungen führen ebenfalls zu Punktabzug.

Aufgabe 2: Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Bestimmen Sie die Determinante $\det A$, das charakteristische Polynom χ_A sowie die Eigenwerte und Eigenräume von A. Für welche Werte von a ist A invertierbar bzw. diagonalisierbar?

Lösung:

Wir addieren die zweite, dritte und vierte Spalte zunächst zur ersten, klammern $a+3$ aus und ziehen dann die erste Spalte von den hinteren ab:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1 \\ a+3 & a & 1 & 1 \\ a+3 & 1 & a & 1 \\ a+3 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3$$

Alternativ kann man die erste Zeile jeweils von den restlichen abziehen, dann $(a+1)$ in den ersten drei Zeilen ausklammern und schließlich die ersten drei Zeilen von der letzten abziehen:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$
$$= (a-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3$$

Für $\chi_A = \det(XE_4 - A) = (-1)^4 \det(A - XE_n) = \begin{vmatrix} a-X & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a-X & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a-X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a-X \end{vmatrix}$ muss nur a durch $a - X$ ersetzt werden und man erhält

$$\chi_A = (a - X + 3)(a - X - 1)^3 = \big(X - (a+3)\big)\big(X - (a-1)\big)^3 .$$

Hinweis: Man kann auch umgekehrt vorgehen, und zunächst χ_A berechnen (gleiche Rechenschritte wie oben). $\det A$ erhält man dann als $\chi_A(0)$, da der konstante Term im charakteristischen Polynom immer $(-1)^n \det(A)$ ist.

Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1 = a + 3$ und $\lambda_2 = a - 1$. Zur Bestimmung der Eigenräume ist das Gleichungssystem $Ax = \lambda_i x$ bzw. $(A - \lambda_i E_4)x = 0$. Für $\lambda_1 = a + 3$ ergibt dies:

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Die Differenz der ersten beiden Zeilen ergibt $x_1 = x_2$, die Differenz der 2. und 3. Zeile $x_2 = x_3$ und die Differenz aus 3. und 4. Zeile $x_3 = x_4$. Also ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = a+3$ und damit $E_A(a+3) = v_1\mathbb{R}$.

Für $\lambda_2 = a - 1$ geht man analog vor. Das „Gleichungssystem“ lautet hier

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Der Lösungsraum $E_A(a-1) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \sum x_i = 0\}$ hat Dimension 3: er wird z.B. durch die Vektoren

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt.

A ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$ ist, also genau für $a \neq 1$ und $a \neq -3$. A ist immer diagonalisierbar, denn für beide Eigenräume ist die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen. **Alternativ:** A ist symmetrisch, und symmetrische Matrizen sind immer diagonalisierbar. □

Bewertung: Determinante, charakteristisches Polynom und Eigenwerte je einen Punkt, richtige Eigenräume 2 Punkte, je einen halben Punkt für Invertierbarkeit und Diagonalisierbarkeit.

Aufgabe 3: Es sei K ein Körper und $V = K^{n \times n}$ der Vektorraum der $n \times n$-Matrizen. Für feste $A, B \in V$ sei die Abbildung $F \in \mathrm{End}(V)$ durch

$$F(M) = AMB^T$$

für alle $M \in V$ definiert. Zeigen Sie: Falls λ Eigenwert von A ist und μ Eigenwert von B ist, so ist $\lambda\mu$ Eigenwert von F.

Lösung:

Da λ Eigenwert von A ist, gibt es ein $v \in K^n$, $v \neq 0$, mit $Av = \lambda v$. Analog für B: Es gibt ein $w \in K^n$, $w \neq 0$, mit $B^T w = \mu w$. Für $M = vw^T \in V$ gilt dann

$$F(M) = A(vw^T)B^T = (Av)(Bw)^T = (\lambda v)(\mu w)^T = \lambda\mu \cdot vw^T = \lambda\mu M$$

Da wegen $v \neq 0$ und $w \neq 0$ auch $M = vw^T \neq 0$ ist, zeigt die Rechnung, dass $M = vw^T$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda\mu$ ist. □

Hinweise:

- $M = vw^T$ zu erraten war vielleicht nicht so einfach. Folgende Überlegung führt zu M: Man betrachte F als Verkettung von zwei Abbildungen $g : M \mapsto AM$ und $h : M \mapsto MB^T = (BM^T)^T$. Dann sind Eigenvektoren der Abbildung g zum Eigenwert λ genau die Matrizen, deren Spalten Eigenvektoren von A sind (zum Eigenwert λ). Analog sind die Eigenvektoren der Abbildung h zum Eigenwert μ solche Matrizen, deren Zeilen aus (transponierten) Eigenvektoren von B zum Eigenwert μ bestehen. Wir suchen also eine Matrix, deren Spalten Eigenvektoren von A und deren Zeilen Eigenvektoren von B sind. Sind alle Spalten Vielfache des gleichen Vektors v und alle Zeilen Vielfache von w^T, so muss die gesuchte Matrix Rang 1 haben und ein Vielfaches von vw^T sein.

- Zu beachten ist folgender Unterschied: $F \in \operatorname{End} V$ ist eine lineare Abbildung vom Vektorraum V der $n \times n$-Matrizen in sich. $F(M) \in V$ dagegen ist ein *Element* von V, d.h. eine $n \times n$-Matrix und kann damit als Element von $\operatorname{End} K^n$, also als lineare Abbildung von $K^n \to K^n$ aufgefasst werden. Damit sind auch χ_F und $\chi_{F(M)}$ völlig verschiedene Objekte. Z.B. hat χ_F den Grad n^2, $\chi_{F(M)}$ dagegen den Grad n. Uns ist keine korrekte Lösung mit Hilfe von χ_F bekannt; schon die darstellende Matrix von F zu bestimmen ist sehr umständlich (sie ist eine $n^2 \times n^2$-Matrix).

Bewertung: Für den richtigen Ansatz, dass es (verschiedene!) Eigenvektoren von A und B gibt, gibt es einen Punkt. Für die richtige Formulierung, was zu zeigen ist, gibt es einen halben Punkt. Einen halben Punkt Abzug gibt es, wenn nicht gezeigt wird, dass der gefundenen Eigenvektor ungleich Null ist.

Aufgabe 4: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ schiefsymmetrisch, d.h. $A^T = -A$. Zeigen Sie, dass $Ax \perp x$ (bzgl. dem Standardskalarprodukt) für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt, und dass $E_n + A$ sowie $E_n - A$ invertierbar sind.

Lösung:

Es sei A schiefsymmetrisch und $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann ist

$$\langle Ax, x\rangle = (Ax)^T x = x^T A^T x = -x^T Ax = -\langle x, Ax\rangle = -\langle Ax, x\rangle$$

und daher $\langle Ax, x\rangle = 0$.

Sei nun $x \in \ker(E_n - A)$. Dann ist $(E_n - A)x = 0$ oder äquivalent dazu $x = Ax$. Da aber dann $0 = \langle Ax, x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$ gilt, folgt $x = 0$. Also besteht der Kern nur aus der 0 und $E_n - A$ ist invertierbar.

Analog für $E_n + A$: Für $x \in \ker(E_n + A)$ gilt $Ax = -x$, und somit $0 = \langle Ax, x\rangle = \langle -x, x\rangle = -\|x\|^2$, woraus wieder $x = 0$ folgt.

Hinweis: Man kann den zweiten Teil allgemeiner formulieren: $\lambda E_n - A$ ist invertierbar für $\lambda \neq 0$. Falls nicht, gäbe es nämlich einen Eigenvektor $v \neq 0$ zum Eigenwert $\lambda \neq 0$, und damit $0 = \langle Av, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda\|v\|^2$, Widerspruch.

Bewertung: 3 Punkte für den Nachweis von $Ax \perp x$, 3 Punkte für die Invertierbarkeit.

Aufgabe 5: Sei V euklidischer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert und nilpotent. Zeigen Sie, dass dann $f = 0$ gilt.

Lösung:

Annahme: Es gibt ein $x \in V$ mit $f(x) \neq 0$. Da f nilpotent ist, gibt es ein minimales $m \geq 2$, so dass $f^m(x) = 0$ ist (da m minimal sein soll, ist $f^{m-1}(x) \neq 0$). Da f selbstadjungiert, gilt nun

$$\begin{aligned}\langle f^{m-1}(x), f^{m-1}(x)\rangle &= \langle f\big(f^{m-2}(x)\big), f^{m-1}(x)\rangle \\ &= \langle f^{m-2}(x), f\big(f^{m-1}(x)\big)\rangle \\ &= \langle f^{m-2}(x), f^m(x)\rangle \\ &= \langle f^{m-2}(x), 0\rangle = 0\end{aligned}$$

und damit $\|f^{m-1}(x)\| = 0$, also auch $f^{m-1}(x) = 0$. Dies steht im Widerspruch zur Minimalität von m. Also ist die Annahme falsch, dass es ein solches x gibt, d.h. für alle x ist $f(x) = 0$. $\square$

Alternativer Beweis für $\dim V = n < \infty$**:** Da f selbstadjungiert, ist die darstellende Matrix von f symmetrisch bezüglich jeder ONB. Sei also $A = A^T$ die darstellende Matrix von f bzgl. einer fest gewählten ONB. Da A symmetrisch ist, ist A diagonalisierbar: $D = P^{-1}AP$ mit einer Diagonalmatrix D. Andererseits ist f nilpotent und daher $\chi_f = X^n$, somit ist 0 der einzige Eigenwert von f (und damit von A). Es folgt $D = 0$, und damit auch $A = 0$ bzw. $f = 0$.

Beweis mit Satz aus Vorlesung ($\dim V = n < \infty$)**:** f ist nilpotent, also ist 0 Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit n. Da f selbstadjungiert ist, ist f auch normal. Also stimmen geometrische und algebraische Vielfachheit der Eigenwerte überein. Es gilt somit $\dim E_f(0) = \dim \ker f = n$, mit anderen Worten $\ker f = V$, d.h. $f = 0$.

Hinweise:

- Gedacht war die Aufgabe für beliebiges V. Da in der Vorlesung allerdings „selbstadjungiert“ nur für Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen definiert wurde, werden auch Lösung, die die Endlichdimensionalität voraussetzten, voll akzeptiert. Die allgemeine Definition ist übrigens wörtlich die gleiche: $f \in \mathrm{End}\, V$ heißt selbstadjungiert, falls $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$ für alle $x, y \in V$ gilt.

- Im endlichdimensionalen Fall ist folgendes zu beachten: Da f selbstadjungiert, ist die darstellende Matrix von f symmetrisch bezüglich jeder ONB. Außerdem ist die darstellende Matrix nilpotent, also gibt es eine Basis, bezüglich derer sie eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Diagonalen ist. Doch **Vorsicht**: i.A. muss diese zweite Basis *keine* ONB sein.

- Noch eine **Warnung**: Der Satz, dass f selbstadjungiert ist genau dann wenn $f^2 = id$ ist, gilt nur unter der Voraussetzung, dass f orthogonal ist. Dies ist hier nicht der Fall (nilpotente Abbildungen sind *nie* orthogonal, da sie immer einen Kern $\neq \{0\}$ haben).

Bewertung: Für jede richtige Lösung gibt es 6 Punkte (egal ob endliche Dimension oder beliebiges V). Einen Punkt gibt es für die richtige Definition von nilpotent und selbstadjungiert.

Aufgabe 6:

(a) Beweisen Sie die Parallelogramm-Gleichung für euklidische Vektorräume: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a): Es gibt kein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, so dass $\sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|_\infty = \max_{i=1..n}\{|x_i|\}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Lösung:

Zu (a): Es gilt

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
&\quad + \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2
\end{aligned}$$

Zu (b): Gäbe es ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ mit $\sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|_\infty$, so würde nach (a) die Parallelogramm-Gleichung für $\| \cdot \|_\infty$ gelten.

Wir versuchen daher, x und y zu finden, für die die Gleichung nicht gilt. Wähle dazu $x = e_1$ und $y = e_2$. Dann ist der betragsmäßig größte Eintrag von $e_1, e_2, e_1 + e_2$ und $e_1 - e_2$ jeweils 1, d.h.

$$\|e_1\|_\infty = \|e_2\|_\infty = \|e_1 + e_2\|_\infty = \|e_1 - e_2\|_\infty = 1\,.$$

Die linke Seite der Parallelogramm-Gleichung beträgt nun also 2, wogegen die rechte Seite 4 beträgt. Also kann es kein solches Skalarprodukt geben. $\square$

Bewertung: Jeder Aufgabenteil gibt 3 Punkte. Wird Teil (a) nur für das Standardskalarprodukt gezeigt, gibt dies 1,5 Punkte.
