

Der Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen

Definitionen

In der Vorlesung haben wir zwei verschiedene Zusammenhänge zwischen

linearen Abbildungen und *Matrizen*

kennengelernt:

- a) Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ liefert eine lineare Abbildung $\ell_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch die Vorschrift $\ell_A(x) := A \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.¹

Umgekehrt läßt sich jede gegebene lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf diese Art schreiben: Es gibt immer eine (eindeutig bestimmte) Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $f = \ell_A$, also $f(x) = A \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.² Diese Matrix A heißt dann **Abbildungsmatrix** von f .

Zu beachten:

- Abbildungsmatrizen gibt es **nur** für lineare Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Für lineare Abbildungen zwischen abstrakten Vektorräumen V und W ist es sinnlos, von „Abbildungsmatrix“ oder „ $f = \ell_A$ “ zu reden!
 - Die Spalten der Abbildungsmatrix sind die Bilder der kanonischen Basisvektoren $e_1, \dots, e_n$: Denn $f(e_j) = A \cdot e_j$ ist die j -te Spalte von A .³
- b) Eine gegebene lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ zwischen zwei Vektorräumen⁴ liefert eine Matrix, **sobald** in den beiden beteiligten Vektorräumen jeweils eine Basis fixiert wird. Sei nämlich

$v_1, \dots, v_n$ eine Basis des „Quellraums“ V
und $w_1, \dots, w_m$ eine Basis des „Zielraums“ W .

Man stellt nun jedes $f(v_j)$ (dies ist ein Element von W !) als Linearkombination von $w_1, \dots, w_m$ dar; die dabei auftretenden Koeffizienten bilden die j -te Spalte einer Matrix $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$.⁵ Diese Matrix heißt **darstellende Matrix von f bezüglich der Basen $v_1, \dots, v_n$ und $w_1, \dots, w_m$** .

Zu beachten:

- Die Matrix M hängt davon ab, welche Basisvektoren in V bzw. W gewählt wurden (sogar die Reihenfolge der Basisvektoren ist wichtig).
- Wenn man die Matrix M kennt, weiß man, was die Abbildung f mit *jedem beliebigen* Vektor $v \in V$ anstellt: Denn v läßt sich als Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$ schreiben, und was f mit jedem v_i macht, kann man an der Matrix M ablesen.⁶

¹Dies ist Beispiel 7.3 c) in der Vorlesung.

²Das ist Satz 7.5 in der Vorlesung.

³Man mache sich das durch Berechnen des Matrixproduktes „Matrix mal e_j “ klar!

⁴Das können Räume der Form $\mathbb{R}^n$ sein, aber auch $\text{Pol}_n(\mathbb{R})$ oder irgendwelche anderen Räume.

⁵In Formeln: Mit $M = (\alpha_{ij})$ gilt $f(v_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} w_i$ für alle j . – Die gesamte Definition findet sich in der Vorlesung in 7.23.

⁶In Formeln: Mit $v = \sum_{j=1}^n a_j v_j$ ist $f(v) = \sum_{j=1}^n a_j f(v_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_j \alpha_{ij} w_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} a_j \right) w_i$.

- Wenn $V = W$ ist (wir es also mit einem *Endomorphismus* zu tun haben), ist es möglich, im „Quellraum“ und im „Zielraum“ der linearen Abbildung $f : V \rightarrow V$ die *gleiche* Basis zu wählen. Dies wird auch so gut wie immer getan!

Im Falle einer linearen Abbildung $f : V \rightarrow V$ wählt man also meistens nur eine einzige Basis $v_1, \dots, v_n$ und betrachtet dann die **darstellende Matrix von f bezüglich der Basis $v_1, \dots, v_n$** .⁷

Abbildungsmatrizen vs. darstellende Matrizen

Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, so besitzt f **sowohl** eine Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (vgl. a) oben) **als auch**, wenn man sich in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ jeweils für eine Basis entscheidet, eine darstellende Matrix $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bezüglich der beiden gewählten Basen (vgl. b) oben). Wichtig ist nun:

Die Abbildungsmatrix A von f
ist identisch mit
der darstellenden Matrix M von f bezüglich der kanonischen Basen $e_1, \dots, e_n$ bzw. $e_1, \dots, e_m$.⁸

Basiswechsel

Wir haben betont, daß die darstellende Matrix M einer linearen Abbildung $f : V \rightarrow W$ davon abhängt, welche Basen $v_1, \dots, v_n$ von V und $w_1, \dots, w_m$ von W gewählt wurden. Wie ändert sich nun die darstellende Matrix, wenn man andere Basen wählt? Im Fall $V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^m$ liefert die **Basiswechsel-Formel**⁹ eine Antwort: Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear, so gilt für

die darstellende Matrix M von f bezüglich der Basen $b_1, \dots, b_n$ von V und $c_1, \dots, c_m$ von W

und

die darstellende Matrix M' von f bezüglich der Basen $b'_1, \dots, b'_n$ von V und $c'_1, \dots, c'_m$ von W

die Beziehung

$$\boxed{M' = C'^{-1} \cdot C \cdot M \cdot B^{-1} \cdot B'}$$

wobei sich die invertierbaren quadratischen Matrizen B, C, B', C' durch Nebeneinanderschreiben der jeweiligen Basisvektoren ergeben: $C = (c_1 \ \dots \ c_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ usw.

⁷In Formeln ist dann $f(v_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} v_i$ für alle j .

⁸Dies ist Bemerkung 7.25 in der Vorlesung.

⁹Folgerung 7.28 in der Vorlesung. Ein einfacherer Spezialfall, der die darstellende Matrix bezüglich *beliebiger* Basen von $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$ berechnet, wenn die Abbildungsmatrix, d.h. die darstellende Matrix bezüglich der *kanonischen* Basen gegeben ist, findet sich direkt davor in Satz 7.27.

Zum Üben

Es sei V ein Vektorraum mit Basis v_1, v_2, v_3 . Über eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$ sei bekannt, daß $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_2 + v_3$ und $f(v_3) = v_3$ gilt. (Übrigens gibt es genau eine solche lineare Abbildung; dies ist genau das **Prinzip der linearen Fortsetzung**!)

- a) Berechne die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis $v_1, \dots, v_3$.
- b) Es sei nun konkret $V = \mathbb{R}^3$ und

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man berechne die Abbildungsmatrix A von f , also die darstellende Matrix von f bezüglich der kanonischen Basis e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{R}^3$.

Anleitung: Die gesuchte Abbildungsmatrix soll leisten: $A \cdot v_1 = v_2$, $A \cdot v_2 = v_2 + v_3$ und $A \cdot v_3 = v_3$. Dies kann man durch Nebeneinanderschreiben als Matrixgleichung lesen:

$$A \cdot (v_1 \ v_2 \ v_3) = (v_2 \ v_2 + v_3 \ v_3).$$

Man löse nun diese Gleichung nach A auf.

Alternatives Vorgehen (ebenfalls durchführen!): Wir bestimmen A als darstellende Matrix von f bezüglich $e_1, \dots, e_3$. Die Schwierigkeit dabei ist die Berechnung von $f(e_1)$, $f(e_2)$ und $f(e_3)$, denn uns sind nur $f(v_1)$, $f(v_2)$ und $f(v_3)$ bekannt.

Man stelle also zunächst jeden der kanonischen Basisvektoren e_i als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 dar, um auf diese Art $f(e_i)$ berechnen zu können.