Zentralübung

1. Im euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^3, \circ)$ seien die 3 linear unabhängigen Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Konstruieren Sie eine ONB mit Hilfe des Gram-Schmidt Verfahrens.

2. Im euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^3, \circ)$ seien die 2 linear unabhängigen Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Wie können Sie mit Hilfe des Vektorproduktes und den Vektoren a, b eine ONB konstruieren? Wenden Sie ihr Verfahren auf die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   an.

3. Gilt für das Vektorprodukt das Assoziativgesetz

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

   mit $a, b, c \in \mathbb{R}^3$?

4. Sei der euklidische Vektorraum $(V = \mathbb{R}^n, \circ)$ sowie die n linear unabhängigen Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} = ne_1 , v_2 = \begin{pmatrix} n-1 \\ n-1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} = (n-1)e_1 + (n-1)e_2$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} n-2 \\ n-2 \\ n-2 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} = (n-2)e_1 + (n-2)e_2 + (n-3)e_3 , ..., v_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + ... + e_n$$

   gegeben. Wenden Sie das Gram-Schmidt Verfahren auf die Vektoren $v_1, ..., v_n$ an, um eine ONB von V zu konstruieren.

   Lösungsskizze:

   Wir konstruieren die geordnete Orthonormalbasis $(w_1, w_2, ..., w_n)$ mit Hilfe des Gram-Schmidt Verfahrens:

   – Zuerst normieren wir v_1 und erhalten den normierten Vektor

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{ne_1}{n} = e_1$$

- Um den zweiten Vektor w_2 zu erhalten, berechnen wir zuerst

$$v_2 - (v_2 \circ w_1)w_1 = (n-1)e_1 + (n-1)e_2 - (n-1)e_1 = (n-1)e_2$$

  Durch Normieren erhalten wir

$$w_2 = \frac{(n-1)e_2}{\|(n-1)e_2\|} = e_2$$

- Um den dritten Vektor w_3 zu erhalten, berechnen wir zuerst

$$v_3-(v_3\circ w_1)w_1-(v_3\circ w_2)w_2 = (n-2)e_1+(n-2)e_2+(n-2)e_3-(n-2)e_1-(n-2)e_3 = (n-2)e_3$$

  Durch Normieren erhalten wir

$$w_3 = \frac{(n-2)e_3}{\|(n-2)e_3\|} = e_3$$

  Wiederholtes Anwenden des Gram-Schmidt Verfahrens liefert also

$$(w_1, w_2, ..., w_n) = (e_1, e_2, ..., e_n)$$

5. Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Finden Sie eine Matrix $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass

$$P^T M P = D$$

   gilt, wobei D eine Diagonalmatrix ist. Überlegen Sie sich dazu zuerst, wie Sie die Matrix P bestimmen können. Welche Eigenschaften besitzt P?