Zentralübung

1. Sei $\sigma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt mit

$$\sigma(a,a) = 2\ , \sigma(b,b) = 3\ \sigma(a,b) = 0$$

gilt, wobei

a)

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ , b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ , b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist.
Finden Sie jeweils eine Matrix $A \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, so dass $\sigma(x,y) = x^T Ay$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt.

2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und diagonalisieren Sie A.

b) Überprüfen Sie, ob $\sigma_A(x,y) := x^T Ay$ ein Skalarprodukt definiert. Verwenden Sie dabei *nicht* das Hurwitz-Kriterium, sondern überprüfen Sie direkt, ob A positiv definit ist.

c) Berechnen Sie die Länge und die Winkel zwischen den Vektoren e_1 und e_2 bezüglich des in b) definierten Skalarproduktes.

d) Finden Sie eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^2, \sigma_A)$. *Hinweis:* Zeigen Sie zuerst, dass die in a) berechneten Eigenvektoren ein Orthonormalsystem (bzgl. σ_A) bilden.

3. Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist

$$B_s = \begin{pmatrix} s & s+1 \\ s+1 & 2s \end{pmatrix}$$

positiv definit?
Lösungsskizze:
Das Hurwitz-Kriterium liefert

$$s > 0$$
$$\det(B_s) = 2s^2 - (s+1)^2 > 0$$

Die zweite Ungleichung liefert $s > 1 + \sqrt{2}$ oder $s < 1 - \sqrt{2}$. Zusammen mit der Bedingung $s > 0$ erhalten wir also, dass für alle $s > 1 + \sqrt{2}$ die Matrix B_s positiv definit ist.