Zentralübung

1. Sei
$$l_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ , l_A(x) = Ax$$
mit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
gegeben. Berechnen Sie für $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
$$A^{2015}x$$
.

2. Sei wieder
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
Ist $\sigma_A(x,y) := x^T Ay$ eine Bilinearform? Finden Sie einen Vektor, so dass $\sigma_A(x,x) < 0$ ist. Wieso ist σ_A kein Skalarprodukt?

3. Geben Sie für jede der nachfolgend aufgeführten quadratischen Formen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bzw. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die zugehörige symmetrische Matrix an, d.h. finden Sie eine symmetrische Matrix A, so dass $f(x,y) = (x \ y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, bzw. $f(x,y,z) = (x \ y \ z)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ gilt.

a)
$$f(x,y) = 2x^2 - 2xy$$

b)
$$f(x,y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2$$

c)
$$f(x,y,z) = -2x^2 + 2xy - 2xz + 2z^2$$

d)
$$f(x,y,z) = x^2 - 3xy + 3xz - y^2 - yz$$