Zentralübung

- In Aufgabe 1 und 2 sei V ein 2-dimensionaler Vekotrraum mit den beiden Basen v_1, v_2 und w_1, w_2. Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung.

1. Für welche Abbildungsvorschriften ist f eindeutig definiert? Geben Sie ebenfalls die darstellende Matrix bzgl. der Basen v_1, v_2 und w_1, w_2 an.

- $$f(v_1) = w_1 \,; f(v_2) = w_1$$

- $$f(v_1) = w_1 \,; f(v_2) = w_2$$

- $$f(v_1) = w_1 \,, f(v_1 + v_2) = w_2$$

- $$f(v_1 + v_2) = 2w_1 \,, f(v_1 - v_2) = 2w_2$$

2. Sei nun $f : V \to V$ gegeben durch

$$f(v_1) = v_1 + v_2 \,, f(v_2) = v_1 + v_2$$

- Geben Sie mit Hilfe der Abbildungsvorschrift zwei Eigenvektoren und die dazuzugehörigen Eigenwerte von f an. (Hinweis: Betrachten Sie das Bild und den Kern von f.)
- Geben Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis v_1, v_2 an.
- Diagonalisieren Sie die darstellende Matrix und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der ersten Teilaufgabe.
- Sei nun $V = \mathbb{R}^2$ und $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Geben Sie die *Abbildungsmatrix* A von f an.

3. Sei

$$l_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,, l_A(x) = Ax$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie für $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$A^{2015}x$$

.