Lösungsvorschlag Tutoriumsblatt 1

1. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 1994).* Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}1\\\lambda\\4\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ w_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix}3\\\mu\\2\end{pmatrix},\ w_3 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

gegeben. Man bestimme alle Parameter $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, für die es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, 2, 3$ gibt.

Lösung:

Wir betrachten die Matrix

$$B = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\2 & \lambda & 0\\3 & 4 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

mit

$$\det(B) = \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\2 & \lambda & 0\\3 & 4 & 1\end{vmatrix} \underset{\text{3. Spalte}}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix}1 & 1\\2 & \lambda\end{vmatrix} = \lambda - 2;$$

dies legt die folgende Fallunterscheidung nahe:

- Im Fall $\lambda \neq 2$ ist B invertierbar, d.h. die Vektoren v_1, v_2, v_3 bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Damit gibt es nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung ((Satz 7.10 der Vorlseung) (unabhängig vom Parameter μ) eine (sogar eindeutig bestimmte) lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, 2, 3$.
- Für den Fall $\lambda = 2$ zeigen wir, daß genau dann eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, 2, 3$ existiert, wenn $\mu = 1$ gilt.
  „$\Rightarrow$": Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = w_3$; wegen $v_2 = v_1 + v_3$ folgt dann

  $$\begin{pmatrix}3\\\mu\\2\end{pmatrix} = w_2 = f(v_2) = f(v_1) + f(v_3) = w_1 + w_3 = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix},$$

  also $\mu = 1$.
  „$\Leftarrow$": Es sei $\mu = 1$. Die Vektoren v_1, v_3 sind linear unabhängig und lassen sich daher (mit einem geeigneten Vektor v_4) zu einer Basis v_1, v_3, v_4 von $\mathbb{R}^3$ ergänzen. Damit gibt es nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung (genau) eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

  $$f(v_1) = w_1, \quad f(v_3) = w_3 \quad \text{und} \quad f(v_4) = 0,$$

und für diese gilt dann ebenfalls

$$f(v_2) = f(v_1 + v_3) = f(v_1) + f(v_3) = w_1 + w_3 = w_2.$$

(*Hinweis:* $f(v_4)$ kann beliebig gewählt werden. Wir haben den Vektor v_4 benötigt, um Satz 7.10 anwenden zu können).

2. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2000).* Seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume. Man beweise:

   a) Wenn es eine injektive lineare Abbildung $f : V \to W$ gibt, die nicht surjektiv ist, so gilt $\dim(V) < \dim(W)$.

   b) Wenn es keine injektive lineare Abbildung von V nach W gibt, so gilt $\dim(V) > \dim(W)$.

   Lösung:

   a) Diese Aufgabe kann auf zwei verschiedene Wege bearbeitet werden.

      Da f injektiv ist, gilt $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$ und damit $\dim \mathrm{Kern}(f) = 0$; da f nicht surjektiv ist, gilt $\mathrm{Bild}(f) \subsetneq W$ und damit $\dim \mathrm{Bild}(f) < \dim(W)$. Mit Hilfe der Dimensionsformel erhält man daher

      $$\dim(V) = \dim \mathrm{Kern}(f) + \dim \mathrm{Bild}(f) = \dim \mathrm{Bild}(f) < \dim(W).$$

   - Alternativ kann auch Satz 7.19 aus dem Vorlesungskript verwendet werden. Da $f : V \to W$ injektiv ist, gilt nach Satz 7.19 a) $\dim(V) \leq \dim(W)$. Falls $\dim(V) = \dim(W)$ gilt, gilt gemäß Satz 7.19 b), dass $f : V \to W$ ebenfalls surjektiv ist. Daher ist für $\dim(V) = \dim(W)$ jede lineare injektive Abbildung ebenfalls surjektiv. Daraus folgt aber sofort, dass $\dim(V) < \dim(W)$ gelten muss, falls es eine injektive lineare Abbildung $f : V \to W$ gibt, die nicht surjektiv ist.

   b) Wir nehmen zum Widerspruch $\dim(V) \leq \dim(W)$ an. Seien $n = \dim(V)$ und $m = \dim(W)$, und wir wählen eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V sowie eine Basis $w_1, \ldots, w_m$ von W. Damit gibt es eine (eindeutig bestimmte) lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_1) = w_1, \ldots, f(v_n) = w_n$, und da die Vektoren $w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängig sind, ist f injektiv im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit gilt aber $\dim(V) > \dim(W)$.

3. Sei die Matrix

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$$

   gegeben. Die zugehörige lineare Abbildung sei

   $$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A \cdot x.$$

   Man bestimme eine Basis des Kerns und eine Basis des Bildraums von f.
   Lösung:

a) Wegen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{II}-2\text{I}}{\underset{\text{III}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{I}-2\text{II}}{\underset{\text{III}-2\text{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\dim \operatorname{Bild}(f) = \operatorname{Rang}(A) = 2$$

Damit erhält man:

- $\operatorname{Kern}(f_0)$ ist der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $A_0 \cdot x = 0$ mit den freien Unbestimmten x_3 und x_4; somit bilden

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

  eine Basis von $\operatorname{Kern}(f)$.
- $\operatorname{Bild}(f_0)$ ist der Spaltenraum der Matrix A_0. Da x_1 und x_2 die gebundenen Unbestimmten von $A_0 \cdot x = 0$ sind, bilden

$$f(e_1) = s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f(e_2) = s_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

  eine Basis von $\operatorname{Bild}(f)$.

4. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2003).* Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{R}$–Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Man entscheide (mit Begründung), welche der folgenden sechs Eigenschaften von f zueinander äquivalent sind:

(i)	f ist injektiv	(iv)	$\dim \operatorname{Bild}(f) = \dim W$
(ii)	f ist surjektiv	(v)	$\dim \operatorname{Kern}(f) = 0$
(iii)	$\dim \operatorname{Bild}(f) = \dim V$	(vi)	$\dim \operatorname{Kern}(f) = \dim V - \dim W$

Lösung: Wir zeigen, daß die Eigenschaften (i), (iii) und (v) zueinander äquivalent sind:

„(i) $\Longrightarrow$ (v)“: Ist f injektiv, so gilt $\operatorname{Kern}(f) = \{0_V\}$ und damit

$$\dim \operatorname{Kern}(f) = 0.$$

„(v) $\Longrightarrow$ (iii)“: Nach der Dimensionsformel gilt

$$\dim V = \dim \operatorname{Kern}(f) + \dim \operatorname{Bild}(f) = \dim \operatorname{Bild}(f).$$

„(iii) $\Longrightarrow$ (i)“: Aus der Dimensionsformel ergibt sich auch

$$\dim \operatorname{Kern}(f) = \dim V - \dim \operatorname{Bild}(f) = 0,$$

also $\mathrm{Kern}(f) = \{0_V\}$, und folglich ist f injektiv.
Hinweis:
Natürlich können Sie die Äquivalenz von (i), (iii) und (v) auch über eine andere Beweiskette führen.

Wir zeigen ferner, daß die Eigenschaften (ii), (iv) und (vi) jeweils zueinander äquivalent sind:

„(ii) $\implies$ (iv)“: Ist f surjektiv, so gilt $\mathrm{Bild}(f) = W$ und damit

$$\dim \mathrm{Bild}(f) = \dim W.$$

„(iv) $\implies$ (vi)“: Wie oben ergibt sich aus der Dimensionsformel

$$\dim \mathrm{Kern}(f) = \dim V - \dim \mathrm{Bild}(f) = \dim V - \dim W.$$

„(vi) $\implies$ (ii)“: Aus der Dimensionsformel ergibt sich auch

$$\dim \mathrm{Bild}(f) = \dim V - \dim \mathrm{Kern}(f) = \dim V - (\dim V - \dim W) = \dim W,$$

woraus wegen $\mathrm{Bild}(f) \subseteq W$ schon $\mathrm{Bild}(f) = W$ folgt; damit ist f surjektiv.

Im Falle $\dim(V) = \dim(W)$ gilt sogar die Äquivalenz der Eigenschaften (i)-(vi). Dies folgt sofort aus (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) und der Äquivalenz von (ii), (iv) und (vi) sowie (i), (iii) und (v).