Lösung zum 9. Tutorium

1. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2008*

   Die Vektoren
$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\3\\2\end{pmatrix}, \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$
   spannen einen Unterraum U im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ auf. Berechnen Sie eine Basis für das orthogonale Komplement von U im $\mathbb{R}^4$.

   Lösung:
   Zu betrachten ist der von den beiden gegebenen Vektoren
$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\3\\2\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$
   aufgespannte Unterraum $U = \langle v_1, v_2\rangle$ im $\mathbb{R}^4$; dazu sei $B = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{4\times 2}$. Das orthogonale Komplement $U^\perp$ von U im euklidischen $\mathbb{R}^4$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$) stimmt wegen
$$\begin{aligned}
x \in U^\perp \quad &\Longleftrightarrow \quad u \perp x \ \text{ für alle } \ u \in U \\
&\underset{U=\langle v_1,v_2\rangle}{\Longleftrightarrow} \quad v_1 \perp x \ \text{ und } \ v_2 \perp x \\
&\Longleftrightarrow \quad v_1 \circ x = 0 \ \text{ und } \ v_2 \circ x = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad v_1^\top \cdot x = 0 \ \text{ und } \ v_2^\top \cdot x = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad B^\top \cdot x = 0
\end{aligned}$$
   für alle $x \in \mathbb{R}$ mit dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $B^\top \cdot x = 0$ mit der Koeffizientenmatrix $B^\top \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ überein. Dementsprechend bilden wegen
$$B^\top = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 3 & 0\end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 0 & -2\end{pmatrix} \underset{(-1)\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$
   die beiden Vektoren
$$w_1 = \begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad w_2 = \begin{pmatrix}-2\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$$
   eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$ von U im $\mathbb{R}^4$.

2. *Staatsexamensaufgabe Herbst 2011*

Man zeige, dass es auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ genau ein Skalarprodukt $\sigma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, bezüglich dem die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ eine Orthonormalbasis bilden, und gebe $\sigma(x, y)$ für $x,\ y \in \mathbb{R}^2$ explizit an.

Lösung:

Wir betrachten die durch die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegebene Bilinearform

$$\sigma_A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \sigma_A(x, y) = x^\top A y,$$

auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Für die beiden Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{mit} \qquad B = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dabei:

$$\left.\begin{array}{rcl} \sigma_A(v_1, v_1) = 1 & \Longleftrightarrow & v_1^\top A v_1 = 1 \\ \sigma_A(v_1, v_2) = 0 & \Longleftrightarrow & v_1^\top A v_2 = 0 \\ \sigma_A(v_2, v_1) = 0 & \Longleftrightarrow & v_2^\top A v_1 = 0 \\ \sigma_A(v_2, v_2) = 1 & \Longleftrightarrow & v_2^\top A v_2 = 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow B^\top A B = E_2,$$

dies ist aber zu

$$A = \left(B^\top\right)^{-1} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$= \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -13 \\ -13 & 5 \end{pmatrix}$$

gleichwertig.

Alternativ kann A auch wie folgt bestimmt werden. Für

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ liefert

$$\sigma_A(v_1, v_1) = 1 \Longleftrightarrow \qquad v_1^\top A v_1 = 1 \tag{1}$$
$$\sigma_A(v_1, v_2) = 0 \Longleftrightarrow \qquad v_1^\top A v_2 = 0 \tag{2}$$
$$\sigma_A(v_2, v_2) = 1 \Longleftrightarrow \qquad v_2^\top A v_2 = 1 \tag{3}$$

3 Gleichungen für die drei unbekannten a, b, c. Lösen des Gleichungssystemes liefert das gewünschte Ergebnis.

Damit gibt es höchstens ein Skalarprodukt σ auf dem $\mathbb{R}^2$, bezüglich dem v_1, v_2 eine Orthonormalbasis bilden, nämlich $\sigma = \sigma_A$ mit der eben bestimmten Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Da aber A symmetrisch und wegen $34 > 0$ und $\det(A) = 1 > 0$ nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz auch positiv definit ist, stellt σ_A tatsächlich ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^2$ mit den gewünschten Eigenschaften dar.

3. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 1999).* Im euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^4, \circ)$ seien

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sowie $U = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ und $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ gegeben.

a) Man gebe jeweils eine Basis von U und V an.

b) Man bestimme eine Basis von $U^\perp$.

c) Man zeige unter Verwendung von b), daß $V \not\subseteq U$ gilt.

d) Man bestimme mit c) die Dimension von $U + V$ und schließe daraus auf die Dimension von $U \cap V$.

Lösung:

a) Mit $A = \big(u_1, u_2, u_3, u_4\big) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gilt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{IV}}{\overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -5 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{IV}-2\cdot\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{I}}{\leadsto}}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+3\cdot\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I}-2\cdot\mathrm{II}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}\cdot\frac{1}{4}}{\leadsto}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{IV}-3\cdot\mathrm{III}}{\overset{\mathrm{I}+\mathrm{III}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

damit sind u_1, u_2, u_3 linear unabhängig mit

$$u_4 = u_1 - 2\,u_2 + u_3$$

und bilden folglich eine Basis von U. Ferner sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

offensichtlich linear unabhängig und bilden daher eine Basis von V.

b) Mit $B = \big(u_1, u_2, u_3\big) \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ gilt

$$B^\top = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{I}-\text{III}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{II}-4\cdot\text{I}}{\underset{\text{III}-\text{I}}{\leadsto}}$$
$$\leadsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -6 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-2\cdot\text{II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{I}\leftrightarrow\text{II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \end{pmatrix};$$

damit ist $w = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$ eine Basis von $U^\perp$.

c) Wegen $v_1 \circ w = 35 \neq 0$ sind v_1 und w nicht orthogonal; da aber $w \in U^\perp$ zu jedem Element aus U orthogonal ist, gilt demnach $v_1 \notin U$. Insbesondere folgt daraus $V \not\subseteq U$.

d) Wegen $V \not\subseteq U$ gilt

$$U \subsetneq U + V \subseteq \mathbb{R}^4$$

und damit

$$3 = \dim(U) < \dim(U+V) \leq 4, \qquad \text{also} \qquad \dim(U+V) = 4,$$

und mit dem Dimensionssatz folgt

$$\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U+V) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

4. *Staatsexamensaufgabe Herbst 2009*

Es sei W ein euklidischer Vektorraum mit dem Skalarprodukt φ. Für $U \subset W$ definiert man

$$U^\perp = \{w \in W : \varphi(u, w) = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

Zeigen Sie, dass für alle Untervektorräume U, $V \subset W$ gilt:

a) $(U+V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$.
b) $(U \cap V)^\perp \supset U^\perp + V^\perp$.

Lösung:
In einem euklidischen Vektorraum W mit dem Skalarprodukt φ wird für einen Unterraum $U \subseteq W$ das orthogonale Komplement

$$U^\perp = \{w \in W \mid \varphi(u, w) = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in U\}$$

betrachtet; dies ist wiederum ein Unterraum von W. Dabei gilt für Unterräume U_1, $U_2 \subseteq W$ mit $U_1 \subseteq U_2$ wegen

$$\begin{aligned} w \in U_2^\perp \quad &\Longrightarrow \quad \varphi(u, w) = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in U_2 \\ &\underset{U_1 \subseteq U_2}{\Longrightarrow} \quad \varphi(u, w) = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in U_1 \\ &\Longrightarrow \quad w \in U_1^\perp \end{aligned}$$

schon $(*)$ $U_2^\perp \subseteq U_1^\perp$. Somit ergibt sich für Unterräume U, $V \subseteq W$ dann:

a) Wegen

$$U \subseteq U + V \qquad \text{und} \qquad V \subseteq U + V$$

gilt gemäß $(*)$

$$(U+V)^{\perp} \subseteq U^{\perp} \qquad \text{und} \qquad (U+V)^{\perp} \subseteq V^{\perp},$$

zusammen also

$$(U+V)^{\perp} \subseteq U^{\perp} \cap V^{\perp}.$$

Für „$\supseteq$“ sei $w \in U^{\perp} \cap V^{\perp}$; damit gilt sowohl

$$w \in U^{\perp}, \qquad \text{also} \qquad \varphi(u,w) = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in U,$$

also auch

$$w \in V^{\perp}, \qquad \text{also} \qquad \varphi(v,w) = 0 \quad \text{für alle} \quad v \in V.$$

Für alle $x \in U + V$ gibt es nun $u \in U$ und $v \in V$ mit $x = u + v$, so daß sich wegen der Linearität von φ im 1. Argument dann

$$\varphi(x,w) = \varphi(u+v,w) = \varphi(u,w) + \varphi(v,w) = 0 + 0 = 0$$

ergibt; damit ist aber $w \in (U+V)^{\perp}$.

b) Wegen

$$U \cap V \subseteq U \qquad \text{und} \qquad U \cap V \subseteq V$$

gilt gemäß $(*)$

$$U^{\perp} \subseteq (U \cap V)^{\perp} \qquad \text{und} \qquad V^{\perp} \subseteq (U \cap V)^{\perp},$$

zusammen also

$$U^{\perp} + V^{\perp} \subseteq (U \cap V)^{\perp}.$$