MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 8
12.06.2015

Lösung zum 8.Tutorium

1. Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

   a) Man zeige, daß v_1, v_2, v_3 eine Basis von $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ ist.

   b) Man bestimme eine Orthonormalbasis b_1, b_2, b_3 von U bezüglich des Standardskalarprodukts $\circ$.

   c) Man stelle v_4 als Linearkombination von b_1, b_2, b_3 dar.

Lösung:

   a) Für $A = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{I, III}-\text{I, IV}-\text{I}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}\cdot(-1)}{\overset{\text{II}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{II}}{\overset{\text{I}-2\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}\cdot\frac{1}{4}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{III}}{\overset{\text{I}-\cdot\text{III}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

   damit sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig mit $v_4 = v_1 + v_3$. Dementsprechend bilden die Vektoren v_1, v_2, v_3 eine Basis von $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

   b) Wir wenden das Gram–Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis v_1, v_2, v_3 von U an und erhalten zunächst

$$a_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = \sqrt{4} = 2, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

danach

$$a_2 = v_2 - (v_2 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \sqrt{6}, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und schließlich

$$\begin{aligned} a_3 &= v_3 - (v_3 \circ b_1) \cdot b_1 - (v_3 \circ b_2) \cdot b_2 = \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\|a_3\| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \quad \text{also} \quad b_3 = \frac{1}{\|a_3\|} \cdot a_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ist b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von U.

c) Es ist

$$v_4 = (v_4 \circ b_1) \cdot b_1 + (v_4 \circ b_2) \cdot b_2 + (v_4 \circ b_3) \cdot b_3 = 4\, b_1 + \sqrt{6}\, b_2 + 2\sqrt{3}\, b_3.$$

2. Gegeben seien s und $t \in \mathbb{R}$ mit $s^2 < t$ sowie $A = \begin{pmatrix} 1 & s \\ s & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Man zeige, daß σ_A ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Man bestimme eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^2, \sigma_A)$.

Lösung

a) Für die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & s \\ s & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt

$$a_{11} = 1 > 0 \qquad \text{und} \qquad \det(A) = t - s^2 > 0;$$

damit ist σ_A ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

b) Wir unterwerfen die Standardbasis e_1, e_2 von $\mathbb{R}^2$ dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren und erhalten

$$a_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \|a_1\| = \sqrt{\sigma_A(a_1, a_1)} = \sqrt{1} = 1,$$

also

$$b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$a_2 = e_2 - \sigma_A(e_2, b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \sqrt{\sigma_A(a_2, a_2)} = \sqrt{t - s^2},$$

also

$$b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{t - s^2}} \begin{pmatrix} -s \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich bilden die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{t - s^2}} \begin{pmatrix} -s \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^2, \sigma_A)$.

3. *nach Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2000*

Auf dem $\mathbb{R}^3$ sei die Bilinearform

$$\langle x, y \rangle := x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$$

gegeben. Laut Aufgabe 2, 8.Übungsblatt stellt diese Bilinearform ein Skalarprodukt dar. Konstruieren Sie eine bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonale Basis für den Unterraum

$$U = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Lösung: Es ist $U = \mathbb{R} \cdot v_1 + \mathbb{R} \cdot v_2$ mit den (offensichtlich linear unabhängigen) Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Anwendung des Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens liefert dann im ersten Schritt

$$\|v_1\| = \sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle} = \sqrt{2}$$

und damit

$$b_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie im zweiten Schritt

$$a_2 = v_2 - \langle v_2, b_1\rangle \cdot b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{-2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \sqrt{\langle a_2, a_2\rangle} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

und damit

$$b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Wegen $\mathbb{R}\cdot b_1 + \mathbb{R}\cdot b_2 = \mathbb{R}\cdot v_1 + \mathbb{R}\cdot v_2$ bilden die Vektoren b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von U bezüglich des Skalarprodukts $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $\mathbb{R}^3$; nachdem hier lediglich nach einer Basis von U aus orthogonalen Vektoren gefragt ist, kann auch a_1, a_2 gewählt werden.

4. *Staatsexamensaufgabe Herbst 2010*

Der Vektorraum $\mathbb{R}^4$ sei mit dem Standard–Skalarprodukt versehen. Der Unterraum $U \subset \mathbb{R}^4$ werde durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

aufgespannt. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis e_1, e_2, e_3 von U mit $e_1 \in \operatorname{span}\{v_1\}$ und $e_2 \in \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$.

Lösung:

Für $B = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ gilt

$$B = \begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&-1\\2&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&-1\\0&0&2\\0&0&-1\end{pmatrix} \underset{\text{IV}+\frac{1}{2}\cdot\text{III}}{\overset{\text{II}-2\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix}1&2&1\\0&-3&-3\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix};$$

wegen $\operatorname{Rang}(B) = 3$ sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig und damit eine Basis des von ihnen erzeugten Unteraums $U = \langle v_1, v_2, v_3\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$. Wir unterwerfen diese Basis dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren und erhalten

$$a_1 = v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = 3, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix},$$

damit

$$a_2 = v_2 - (v_2 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{6}{3} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \frac{1}{3}\sqrt{18}, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und damit

$$\begin{aligned} a_3 = v_3 - (v_3 \circ b_1) \cdot b_1 - (v_3 \circ b_2) \cdot b_2 = \\ = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{\sqrt{18}} \cdot \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\|a_3\| = \sqrt{3}, \quad \text{also} \quad b_3 = \frac{1}{\|a_3\|} \cdot a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von U bezüglich des Standardskalarprodukts $\circ$ auf $\mathbb{R}^4$ mit $\langle b_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$ und $\langle b_1, b_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$, also mit $b_1 \in \langle v_1 \rangle$ und $b_2 \in \langle v_1, v_2 \rangle$; wir können also $e_1 = b_1$, $e_2 = b_2$ und $e_3 = b_3$ wählen.