MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 7
05.06.2015

# Lösung zum 7. Tutorium

1. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2008*

   Die Bilinearform $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

   $$\varphi(x,y) := 9x_1y_1 - 6x_1y_2 - 6x_2y_1 + 5x_2y_2 \quad \text{für} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

   Weisen Sie nach, dass $\varphi$ ein Skalarprodukt ist.

   **Lösung:**

   Der Nachweis, daß die gegebene Bilinearform

   $$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x,y) := 9x_1y_1 - 6x_1y_2 - 6x_2y_1 + 5x_2y_2,$$

   symmetrisch und positiv definit und damit ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^2$ bildet, kann anhand der Definition oder mit Hilfe der Matrixdarstellung erfolgen:

   - Wegen

     $$\begin{aligned}\varphi(y,x) &= 9y_1x_1 - 6y_1x_2 - 6y_2x_1 + 5y_2x_2 = \\ &= 9x_1y_1 - 6x_1y_2 - 6x_2y_1 + 5x_2y_2 = \varphi(x,y)\end{aligned}$$

     für alle $x$, $y \in \mathbb{R}^2$ ist $\varphi$ zunächst symmetrisch. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt ferner

     $$\begin{aligned}\varphi(x,x) &= 9x_1^2 - 6x_1x_2 - 6x_2x_1 + 5x_2^2 = 9x_1^2 - 12x_1x_2 + 5x_2^2 = \\ &= \left((3x_1)^2 - 2\cdot(3x_1)\cdot(2x_2) + (2x_2)^2\right) + x_2^2 = (3x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 \geq 0,\end{aligned}$$

     und aus $\varphi(x,x) = 0$ folgt $3x_1 - 2x_2 = 0$ und $x_2 = 0$, also $x_1 = x_2 = 0$, und damit $x = 0$; damit ist $\varphi$ auch positiv definit.

   - Für alle $x$, $y \in \mathbb{R}^2$ gilt

     $$\varphi(x,y) = x^\top A y \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

     Wegen $A^\top = A$ ist die Matrix $A$ und damit auch die Bilinearform $\varphi$ symmetrisch. Da die beiden Hauptminoren

     $$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 9 \end{vmatrix} = 9$$

     und

     $$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} = 9 \cdot 5 - (-6)\cdot(-6) = 45 - 36 = 9$$

     positiv sind, ist nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz die symmetrische Matrix $A$ und damit auch die Bilinearform $\varphi$ positiv definit.

2. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2002* Man zeige, dass durch

$$\langle x, y\rangle := x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

eine positiv definite symmetrische Bilinearform, d.h. ein Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ definiert ist.

**Lösung:**

Für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\langle x, y\rangle = x^\top Ay \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2};$$

folglich ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$. Wegen $A^\top = A$ ist die Matrix $A$ und damit auch die Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ symmetrisch. Da die beiden Hauptminoren

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \text{und} \qquad \det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1$$

positiv sind, ist nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz die symmetrische Matrix $A$ und damit auch die Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv definit.

3. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010*

   Gegeben sei die reelle $3 \times 3$–Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

   a) Zeigen Sie, dass durch

$$\sigma_B(x, y) := x^\top \cdot B \cdot y \qquad \text{für alle} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

   ein Skalarprodukt $\sigma_B$ auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ definiert wird.

   b) Berechnen Sie den Cosinus des Winkels, den die beiden Vektoren

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

   bezüglich des in a) definierten Skalarprodukts $\sigma_B$ einschließen.

**Lösung:**

a) Zu betrachten ist die durch $\sigma_B(x,y) = x^\top By$ für alle $x$, $y \in \mathbb{R}^3$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

definierte Bilinearform des $\mathbb{R}^3$; zunächst ist wegen $B^\top = B$ die Matrix $B$ und damit auch die Bilinearform $\sigma_B$ symmetrisch. Da die drei Hauptminoren

$$\det(B_1) = \det(1) = 1 > 0,$$

$$\det(B_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0,$$

$$\det(B_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (12+6+6) - (8+9+6) = 1 > 0$$

positiv sind, ist nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz die symmetrische Matrix $B$ und damit auch die Bilinearform $\sigma_B$ positiv definit; folglich ist $\sigma_B$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.

b) Es ist

$$\sigma_B(e_2, e_2) = e_2^\top B e_2 = 2, \qquad \text{also} \qquad \|e_2\| = \sqrt{\sigma_B(e_2,e_2)} = \sqrt{2},$$

und

$$\sigma_B(e_3, e_3) = e_3^\top B e_3 = 6, \qquad \text{also} \qquad \|e_3\| = \sqrt{\sigma_B(e_3,e_3)} = \sqrt{6},$$

sowie

$$\sigma_B(e_2, e_3) = e_2^\top B e_3 = 3,$$

so daß sich für den Winkel $\varphi$ zwischen $e_2$ und $e_3$ wegen

$$\cos\varphi = \frac{\sigma_B(e_2,e_3)}{\|e_2\| \cdot \|e_3\|} = \frac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

dann $\varphi = \frac{\pi}{6}$ bzw. $\varphi = 30°$ ergibt.

4. Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix. Sei $A = B^T B$. Zeigen Sie, dass

$$\sigma_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ , \sigma_A(x,y) := x^T Ay$$

ein Skalarprodukt auf dem reelen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ definiert.
*Hinweis:*
Die Symmetrieeigenschaft ist ersichtlich (Wieso?). Sie müssen also noch zeigen, dass $\sigma_A$ positiv definit ist. Überlegen Sie sich, wie Ihnen die Injektivität von $B$ weiterhilft.

**Lösung:**
Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned}\sigma_A(x,y) =& x^T A y = x^T B^T B y = (Bx)^T By \\ =& (Bx) \cdot (By) = (By) \cdot (Bx) = (By)^T Bx = y^T B^T Bx = y^T Ax \\ =& \sigma_A(y,x)\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet für $a, b \in \mathbb{R}^n$ $a \cdot b$ das Stanard-Skalarprodukt (= Euklidisches Skalarprodukt) auf dem $\mathbb{R}^n$.
Laut Angabe ist $B$ invertierbar, damit ist für $x \in \mathbb{R}^n$ , $x \neq 0$ ebenfalls $Bx \neq 0$. (Würde $Bx = 0$ gelten, so ist $B^{-1}Bx = B^{-1}0 = 0$, also insgesamt $x = 0$, was einen Widerspruch liefert). Somit ist für $x \neq 0$

$$\sigma_A(x,x) = x^T Ax = xB^T Bx = (Bx) \cdot (Bx) > 0$$

Die Ungleichung $(Bx) \cdot (Bx) > 0$ folgt aus der positiven Definitheit des Standard-Skalarproduktes angewendet auf den Vektor $Bx \neq 0$.