Lösung zum 6. Tutorium

1. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2014*

   Sei $s \in \mathbb{R}$ ein Parameter und sei A_s die von s abhängige Matrix

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ s^2 & s & -s \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Bestimmen Sie die Eigenwerte A_s in Abhängigkeit von s.
   Hinweis: Zur Kontrolle: $\det(A_s - \lambda E_3) = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-s)$.

   b) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist A_s diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.
   Hinweis: Zur Kontrolle: Für $s = 2$ ist A_s nicht diagonalisierbar, sonst schon.

Lösung:

a) Die in Abhängigkeit vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ s^2 & s & -s \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}
\chi_{A_s}(\lambda) \quad &= \quad \det(A_s - \lambda \cdot E_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ s^2 & s-\lambda & -s \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{Laplace}}{\underset{\text{2. Spalte}}{=}} \quad (-1)^{2+2} \cdot (s-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \quad (s-\lambda) \cdot \big((1-\lambda)^2 - 1^2\big) \\
&= \quad (s-\lambda) \cdot \big(-\lambda \cdot (2-\lambda)\big) \\
&= \quad -\lambda \cdot (\lambda - 2) \cdot (\lambda - s)
\end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit den Nullstellen

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \text{und} \qquad \lambda_3 = s;$$

dadurch wird die folgende Fallunterscheidung motiviert:

- Für $s \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ besitzt A_s die drei einfachen Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = s$.

- Für $s = 0$ besitzt A_0 den Eigenwert $\lambda_1 = 0$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 2$ sowie den einfachen Eigenwert $\lambda_2 = 2$.
- Für $s = 2$ besitzt A_2 den einfachen Eigenwert $\lambda_1 = 0$ sowie den Eigenwert $\lambda_2 = 2$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 = 2$.

b) Wir treffen erneut die Fallunterscheidung von a) und erhalten:

- Für $s \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ besitzt A_s drei paarweise verschiedene Eigenwerte und ist damit als 3×3–Matrix diagonalisierbar.
- Für $s = 0$ ist
$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$$
A_0 besitzt den Eigenwert $\lambda_1 = 0$ mit der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 2$. Wegen
$$A_0 - \lambda_1 \cdot E_3 = A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{III}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ergibt sich
$$\dim \operatorname{Kern}(A_0 - \lambda_1 \cdot E_3) = 2$$
Damit erbigt sich für die geometrische Vielfachheit
$$\gamma_1 = 2$$
und wegen $\gamma_1 = \alpha_1 = 2$ und $\gamma_2 = \alpha_2 = 1$ ist A_0 diagonalisierbar.
Bemerkung: Sie werden später in der Vorlesung noch lernen, dass **jede** symmetrische Matrix (also $M^\top = M$) diagonalisierbar ist. Da $A_0^\top = A_0$ gilt, ist A_0 symmetrisch und damit ist ohne Rechnung ersichtlich, dass A_0 diagonalisierbar ist.
- Für $s = 2$ besitzt A_2 den Eigenwert $\lambda_2 = 2$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 = 2$; wegen
$$A_2 - \lambda_2 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}+\text{I}}{\overset{\text{II}+4\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ergibt sich für die geometrische Vielfachheit
$$\gamma_2 = 3 - \operatorname{Rang}(A_2 - \lambda_2 \cdot E_3) = 3 - 2 = 1,$$
und wegen $\gamma_2 < \alpha_2$ ist A_2 nicht diagonalisierbar.

2. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2013*

Wahr oder falsch: Begründen Sie Ihre Antwort durch eine Erklärung oder eine Widerlegung.

a) Wenn v ein Eigenvektor einer Matrix A zum Eigenwert λ ist, dann ist $2v$ ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert 2λ.

b) Für jede quadratische Matrix A gilt $\mathrm{Kern}(A) \subseteq \mathrm{Kern}(A^2)$.
Hinweis: Schreiben Sie die Definition von $\mathrm{Kern}(A)$ und $\mathrm{Kern}(A^2)$ auf und überlegen Sie sich, ob aus $v \in \mathrm{Kern}(A)$ folgt, dass $v \in \mathrm{Kern}(A^2)$ gilt. Überlegen Sie sich auch, wieso A eine quadratische Matrix sein muss.

c) Sei $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^n$ das charakteristische Polynom einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann ist A zur Einheitsmatrix E_n ähnlich.
Hinweis: Können Sie eine 2×2 Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ finden, dessen charakertistische Polynom $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^2$ ist, die aber nicht ähnlich zur Einheitsmatrix E_2 ist?

d) Wenn das Produkt AB zweier $n \times n$–Matrizen invertierbar ist, dann sind die beiden Matrizen A und B auch invertierbar.
Hinweis: Betrachten Sie $\det(AB)$.

Lösung:

a) Die Aussage ist falsch: mit $v \in \mathbb{R}^n$ ist auch $2\,v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, und nicht zum Eigenwert $2\,\lambda$ für $\lambda \neq 0$; im allgemeinen ist $2\,\lambda \in \mathbb{R}$ überhaupt kein Eigenwert der Matrix A.

b) Die Aussage ist richtig: zu einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und ihrem Quadrat $A^2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ betrachten wir die zugehörigen linearen Abbildungen

$$\ell_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \ell_A(x) = A\cdot x, \quad \text{und} \quad \ell_{A^2} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \ell_{A^2}(x) = A^2\cdot x.$$

Für alle $x \in \mathrm{Kern}(\ell_A)$ gilt $A\cdot x = 0$, woraus

$$A^2 \cdot x = (A\cdot A)\cdot x = A\cdot(A\cdot x) = A\cdot 0 = 0,$$

also $x \in \mathrm{Kern}(\ell_{A^2})$, folgt; damit gilt $\mathrm{Kern}(\ell_A) \subseteq \mathrm{Kern}(\ell_{A^2})$.

c) Die Aussage ist falsch: wir betrachten als Gegenbeispiel die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\,E_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Matrix A ist aber nicht ähnlich zur Einheitsmatrix E_2; denn ansonsten gäbe es eine Matrix $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mit $P^{-1}A\,P = E_2$, woraus

$$A = P\,E_2\,P^{-1} = P\,P^{-1} = E_2,$$

also ein Widerspruch, folgt.

d) Die Aussage ist richtig: wir verwenden die für jede quadratische Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gültige Beziehung

$$(*) \quad M \text{ invertierbar} \iff \det(M) \neq 0$$

und erhalten für alle $A,\, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Hilfe des Determinantenmultiplikationssatzes $(\star)$ dann

$$
\begin{aligned}
&A\cdot B \text{ invertierbar} \underset{(*)}{\iff} \det(A\cdot B)\neq 0 \underset{(\star)}{\iff}\\
&\iff \det(A)\cdot\det(B)\neq 0 \underset{\text{in } \mathbb{R}}{\iff} \big(\det(A)\neq 0 \ \text{ und } \ \det(B)\neq 0\big) \underset{(*)}{\iff}\\
&\qquad\qquad \iff \big(A \text{ invertierbar und } B \text{ invertierbar}\big).
\end{aligned}
$$

3. *Staatsexamensaufgabe Herbst 2008*

Es sei V der $\mathbb{R}$–Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad ≤ 2. Für jedes Polynom $p(x)$ hat das Polynom $x\,p(x+1) - x\,p(x)$ keinen höheren Grad als $p(x)$ (Wieso?). Deswegen ist die lineare Abbildung

$$F : V \to V, \quad p(x) \mapsto x\,p(x+1) - x\,p(x),$$

wohldefiniert.

a) Bestimmen Sie die Matrix von F bezüglich der Basis $1,\, x,\, x^2$ von V.
Hinweis: Geben Sie zuerst die Abbildung

$$F : V \to V,\ a_0 + a_1x + a_2x^2 \mapsto ?$$

explizit an und bestimmen Sie damit die darstellende Matrix.

b) Ist diese Matrix (und damit die Abbildung F) diagonalisierbar?

c) Zusatzaufgabe: Geben Sie die eine Basis von Eigenvektoren von F an.
Hinweis: Finden Sie zuerst eine Basis aus Eigenvektoren für die darstellende Matrix. Mit Hilfe dieser Basis haben Sie die Aufgabe im wesentlichen schon gelöst (Wieso?).

Lösung:
Die Elemente (also Vektoren) des $\mathbb{R}$–Vektorraums V aller reellen Polynome vom Grad ≤ 2 besitzen die Gestalt

$$p(x) = a_0 + a_1\cdot x + a_2\cdot x^2 \qquad \text{mit} \quad a_0,\, a_1,\, a_2 \in \mathbb{R};$$

damit ist

$$p(x+1) = a_0 + a_1\cdot(x+1) + a_2\cdot(x+1)^2$$

und folglich

$$
\begin{aligned}
x\,p(x+1) - x\,p(x) &= x\cdot\big(p(x+1)-p(x)\big) =\\
&= x\cdot\Big(\big(a_0 + a_1\cdot(x+1) + a_2\cdot(x+1)^2\big) - \big(a_0 + a_1\cdot x + a_2\cdot x^2\big)\Big) =\\
&= x\cdot\Big(a_1 + a_2\cdot\big((x+1)^2 - x^2\big)\Big) = x\cdot(a_1 + a_2\cdot(2\,x+1)) =\\
&= x\cdot((a_1+a_2) + 2\,a_2\cdot x) = (a_1+a_2)\cdot x + 2\,a_2\cdot x^2.
\end{aligned}
$$

Die gegebene lineare Abbildung ist demnach

$$F : V \to V, \quad a_0 + a_1\cdot x + a_2\cdot x^2 \ \mapsto\ (a_1+a_2)\cdot x + 2\,a_2\cdot x^2.$$

a) Wegen

$$\begin{aligned} F(1) &\underset{a_0=1,\, a_1=0,\, a_2=0}{=} 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \\ F(x) &\underset{a_0=0,\, a_1=1,\, a_2=0}{=} 0\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \\ F(x^2) &\underset{a_0=0,\, a_1=0,\, a_2=1}{=} 0\cdot 1 + 1\cdot x + 2\cdot x^2 \end{aligned}$$

ist

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

die darstellende Matrix von F bezüglich der Basis $1,\ x,\ x^2$.

b) Wegen

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks–}}{=}} -\lambda\,(1-\lambda)\,(2-\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt die Matrix M die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ und ist damit als 3×3–Matrix diagonalisierbar; folglich ist auch der Endomorphismus F von V diagonalisierbar.

c) Die Eigenräume der darstellenden Matrix M sind gegeben durch

$$\mathrm{Eig}(M,0) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ , \mathrm{Eig}(M,1) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ , \mathrm{Eig}(M,2) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit bilden die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ , v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ , v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von M. Nun ist aber M die darstellende Matrix von F bezüglich der Basis $1, x, x^2$ von V. Die Koordinatenabbildung $p : V \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$p(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ , p(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ , p(x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,$$

Damit ist ersichtlich, dass $p(1) = v_1\ , p(x) = v_2\ , p(x+x^2) = v_3$ gilt. Somit ist $1, x, x+x^2$ eine Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von F. Insbesondere gilt

$$F(1) = 0\ , F(x) = x\ , F(x+x^2) = 2(x+x^2)$$

4. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2005*

a) Berechnen Sie die Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ist A diagonalisierbar?

b) Ist A invertierbar?

Lösung:

a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, E_4) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{1. Zeile}}{=}$$

$$= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{1. Spalte}}{=}$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda)^2;$$

wegen

$$\chi_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 1 \quad \text{oder} \quad \lambda = 2$$

besitzt A genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Wegen

$$A - \lambda_1\, E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bildet $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A; \lambda_1)$, und wegen

$$A - \lambda_2\, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bildet $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A; \lambda_2)$. Da höchstens zwei Eigenvektoren der Matrix A linear unabhängig sind, existiert keine Basis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A; folglich ist die Matrix A nicht diagonalisierbar.

b) Wegen $\det(A) = \chi_A(0) = 4 \neq 0$ ist die Matrix A invertierbar.